J. A. Maruhn.
Frankfurt am Main 1973

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523706_0035

Dynamische Behandlung der Massenasymmetrie in der Kernspaltung mit Hilfe des Zweizentren-Schalenmodells

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

von
Joachim Alexander Maruhn
aus
Frankfurt am Main

Frankfurt am Main
November 1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

Dekan:	Prof. Dr. H. Müser
Leiter der Arbeit:	Prof. Dr. W. Greiner
Erstgutachter:	Prof. Dr. W. Greiner
Zweitgutachter:	Prof. Dr. R. Dreizler
Drittgutachter:	Prof. Dr. D. Drechsel

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Dezember 1973

I n h a l t

		Seite
1.	Einleitung	1
2.	Parametrisierung der Kernformen	4
3.	Der Einteilchen-Hamiltonoperator und seine Diagonalisierung	10
4.	Das Strutinsky-Verfahren	16
5.	Die Paarkraft-Korrektur	23
6.	Das Tropfenmodell	26
7.	Das Cranking-Modell	33
8.	Massenparameter im Zweizentrenmodell	41
9.	Dynamische Behandlung der Massenasymmetrie . .	48
10.	Ergebnisse und Diskussion	55
11.	Zusammenfassung und Ausblick	79
Anhang		
A.	Matrixelemente des Hamiltonoperators	82
B.	Ein Differenzenverfahren zur Lösung der Schrödingergleichung	86
Literaturverzeichnis		88

1. Einleitung

Seit der Entdeckung der Kernspaltung und der ersten bahnbrechenden Arbeit zu ihrer theoretischen Deutung [1,2] blieben theoretische Untersuchungen lange auf Verfeinerungen des Tropfen-Modells beschränkt, obwohl bald klar wurde, daß das Modell wesentliche Kerneigenschaften wie die Existenz deformierter Grundzustände und die Bevorzugung asymmetrischer Spaltung bei vielen schweren Kernen nicht zu erklären vermag. Erst mit dem Nilsson-Modell [3] wurde es möglich, das Problem mit schalentheoretischen Methoden anzugehen, und man erhielt nicht nur deformierte Grundzustände und Spaltbarrieren in der richtigen Größenordnung, sondern bei einer Verallgemeinerung des Modells auf Oktupoldeformationen auch Hinweise auf die energetische Bevorzugung massenasymmetrischer Deformationen auf dem Spaltweg, insbesondere an der Spaltbarriere [4-6].

Die Anwendung des Nilsson-Modells auf derart stark deformierte Zustände, wie sie bei der Spaltung auftreten, stieß jedoch auf Bedenken, da das Modell nicht in der Lage ist, den Grenzfall zweier getrennter Fragmente richtig zu beschreiben. Deshalb besteht Grund zu der Annahme, daß es auch schon bei etwas geringeren Deformationen nicht mehr zuverlässig ist (siehe etwa [7]).

Aus diesen Gründen wurde ein neues Schalenmodell entwikkelt, das sog. Zweizentrenmodell [8-11]. Es ist speziell auf die bei der Spaltung auftretenden Deformationen zugeschnitten und enthält sowohl einen einzelnen Kern mit Nilsson-Deformation wie auch zwei getrennte Fragmente gleicher Art als Grenzfälle. Damit werden die Unzulänglichkeiten des Nilsson-Modells bei großen Deformationen vermieden, und außerdem läßt die korrekte Berücksichtigung des Falls getrennter Fragmente die Behandlung von Schwerionen-Stoßprozessen zu [12,13].

Ein weiterer großer Fortschritt wurde in letzter Zeit mit der Schalenkorrekturmethode nach Strutinsky [14,15] erzielt. Man berechnet dabei aus dem Schalenmodell nur Korrekturen zur Gesamtenergie, die auf die Deformationsenergie des Tropfenmodells aufaddiert werden (Renormierung). Damit sind die Nachteile des Schalenmodells bei der Berechnung von Bindungs-

energien zu vermeiden, und es gelingt, eine große Anzahl von Phänomenen bei der Spaltung quantitativ zu erklären (s. Kap. 4). Die theoretischen Grundlagen der Methode sind zwar immer noch nicht befriedigend geklärt, aber die bisherigen Versuche zu ihrer Begründung scheinen geeignet, das Vertrauen in die Methode zu stärken [16-22].

Besonders fruchtbar ist die Verbindung von Zweizentrenmodell und Schalenkorrekturmethode. Es ist bisher gelungen, die Spaltschwellen, Massenasymmetrien und Lebensdauern für eine große Zahl von Kernen quantitativ oder wenigstens semiquantitativ zu erklären [23-28].

Alle diese Rechnungen beruhen jedoch auf den statischen Potentialenergieflächen und die Dynamik wird höchstens über das WKB-Durchdringungsintegral berücksichtigt. Während die Ableitung eines Spaltweges ohne Kenntnis der kollektiven Massenparameter einem Hasardspiel gleicht - Hofmann und Dietrich [29] geben drastische Beispiele - hat auch die WKB-Näherung den Nachteil, daß die Durchdringung der Barriere entlang eines eindimensionalen Spaltweges betrachtet wird und die Verbreiterung der wirklichen Wellenfunktionen um diesen Weg vernachlässigt werden muß. Um etwas mehr gesicherte Aussagen machen zu können, ist also eine bessere Behandlung der Dynamik nötig.

Es gab schon früh Versuche, die Dynamik im Tropfenmodell zu behandeln, aber da dieses Modell schon bei der Berechnung von Potentialenergieflächen und Massenparametern (besonders den Trägheitsmomenten) wenig realistisch ist, scheinen diese Rechnungen nur auf höhere Anregungsenergien anwendbar zu sein [30-32]. Andererseits erlaubt das Schalenmodell im Zusammenhang mit der Schalenkorrekturmethode die Berechnunger sinnvoller Potentialenergieflächen und liefert vernünftige Werte für Trägheitsmomente und Vibrations-Massenparameter, wenn man das Cranking-Modell nach Inglis und Belyaev [33-36] zugrunde legt. Es erscheint deshalb wünschenswert, die Dynamik mit diesen Methoden auch auf andere kollektive Freiheitsgrade anzuwenden und speziell Aufschluß über das dynamische Verhalten bei der Spaltung zu gewinnen.

In der vorliegenden Arbeit wird das asymmetrische Zweizentrenmodell nach [37,38] dazu benutzt, die Dynamik einer völlig

neuartigen Kollektivkoordinate, nämlich der Massenasymmetrie, zu untersuchen, um damit theoretische Aussagen über die Verteilung der Fragmentmassen zu gewinnen. Die Verwendung einer Kollektivkoordinate erlaubt es, das ursprüngliche Vielkanalproblem mit der Vielfalt der möglichen Endkonfigurationen auf die Dynamik einer einzigen kontinuierlich variierenden Koordinate zu reduzieren.

Im Folgenden wird zunächst das asymmetrische Zweizentrenmodell skizziert. Dann werden zur Berechnung der Deformationsenergie das Tropfenmodell, das Strutinsky-Verfahren und die Paarkraftkorrektur erläutert. Mit dem Cranking-Modell wird zur Dynamik übergeleitet, die dann für die hier speziell interessierenden Freiheitsgrade diskutiert wird. Konkrete numerische Rechnungen an einigen Kernen bilden den Abschluß.

2. Parametrisierung der Kernformen

Einen entscheidenden Einfluß auf die Handlichkeit und praktische Verwendbarkeit eines Schalenmodells der hier verwendeten Art hat die Auswahl der Kernformen, die man beschreiben möchte, und ihre Parametrisierung. Zum einen soll die Vielfalt der Kernformen groß genug sein, um alle interessierenden Effekte behandeln zu können, andererseits aber soll die Anzahl der Parameter möglichst gering sein, damit der Rechenaufwand in Grenzen bleibt.

Ein Kompromiß zwischen diesen beiden Forderungen kann nur dann befriedigend erreicht werden, wenn die Schar der Kernformen möglichst eng an die zu behandelnden Probleme angepaßt wird, d. h. wenn insbesondere keine überflüssigen Freiheitsgrade enthalten sind, die physikalisch nicht auftretende Deformationen beschreiben.

Die Untersuchung von Kernformen im Tropfenmodell gibt eine Möglichkeit, solche Parametrisierungen zu erzeugen. Man kann versuchen, die Deformationsenergie eines Tropfens in einer möglichst allgemeinen, vielparametrischen Beschreibung der Kernoberfläche zu betrachten [39,40] und daraus eine geringe Zahl von Parametern zu extrahieren, die für den betrachteten Prozeß entscheidend sind. So wurden z. B. von Nix [41] und Lawrence [30,42] "optimale" Tropfenmodelle mit drei bzw. zwei Parametern entwickelt, die für die Spaltung sehr geeignet sind.

Diese "optimalen" Tropfenmodelle haben allerdings den Nachteil, daß es schwierig ist, sie mit Schalenmodellen zu kombinieren. Um eine eindeutige Zuordnung von Tropfen- und Schalenmodell zu erhalten, ist es nämlich wünschenswert, daß die Kernoberfläche des Tropfenmodells mit einer Äquipotentialfläche des Schalenmodells zusammenfällt. Andernfalls ergibt sich das Problem, durch mehr oder weniger willkürliche Vorschriften eine Zuordnung zu bewirken [43].

Soll nun das Schalenmodellpotential eine relativ einfache Gestalt haben, dann werden die möglichen Formen der Äquipotentialflächen stark eingeschränkt und damit auch eine geringere Mannigfaltigkeit von Tropfenmodelloberflächen zu-

gelassen. Man erhält also entweder ein einfaches Schalenmodell mit weniger guten Tropfeneigenschaften oder ein "optimales" Tropfenmodell mit kompliziertem Schalenmodellpotential.

Während letztere Möglichkeit vor allem im Zusammenhang mit Potentialen endlicher Tiefe [44,20] und auch stark modifizierten Oszillatorpotentialen [7,45] benutzt wurde, ist das in dieser Arbeit verwendete Modell an den Erfordernissen eines einfachen Schalenmodells orientiert. Demgemäß wurde keines der "optimalen" Tropfenmodelle gewählt, sondern es wurden Parameter ausgesucht, die leicht in ein Schalenmodell einzubauen sind und dennoch einigermaßen den wesentlichen Freiheitsgraden eines spaltenden Kerns entsprechen.

Dazu wurde das Schalenmodell aus zwei Nilsson-Modellen für die Fragmente zusammengesetzt, die die gleiche Symmetrieachse haben und mit einem Zusatzpotential glatt aneinandergesetzt sind. Dementsprechend sind die Äquipotentialflächen - und damit auch die Oberfläche des zugeordneten Tropfens - aus zwei Rotationsellipsoiden mit glattem Verbindungsstück zusammengesetzt. Ein Schnitt durch Potential und Kernform entlang der Symmetrieachse ist in Fig. 1 dargestellt.

Die Kerndeformation wird durch die folgenden fünf freien Parameter bestimmt (zur Definition von a_i, b_i und z_i s. Fig. 1):

a) Die Elongation λ, die die Länge des Kerns entlang der Symmetrieachse in Einheiten der Länge des entsprechenden sphärischen Kerns angibt. $\lambda = (a_1+a_2+z_2-z_1)/2R_0$.

b) Der Parameter ε gibt die Dicke des Halses zwischen den Fragmenten an. ε ist allerdings nicht selbst die geometrische Halsdicke, sondern geht als Parameter in das Potential ein (s. u.).

c) β_1 und

d) β_2, die Deformationen der Fragmente, die als $\beta_1 = a_1/b_1$ und $\beta_2 = a_2/b_2$ definiert sind.

e) Die Massenasymmetrie ξ, die aus den Fragmentmassen A_1 und A_2 gemäß

$$\xi = (A_1 - A_2)/(A_1 + A_2) \qquad (1)$$

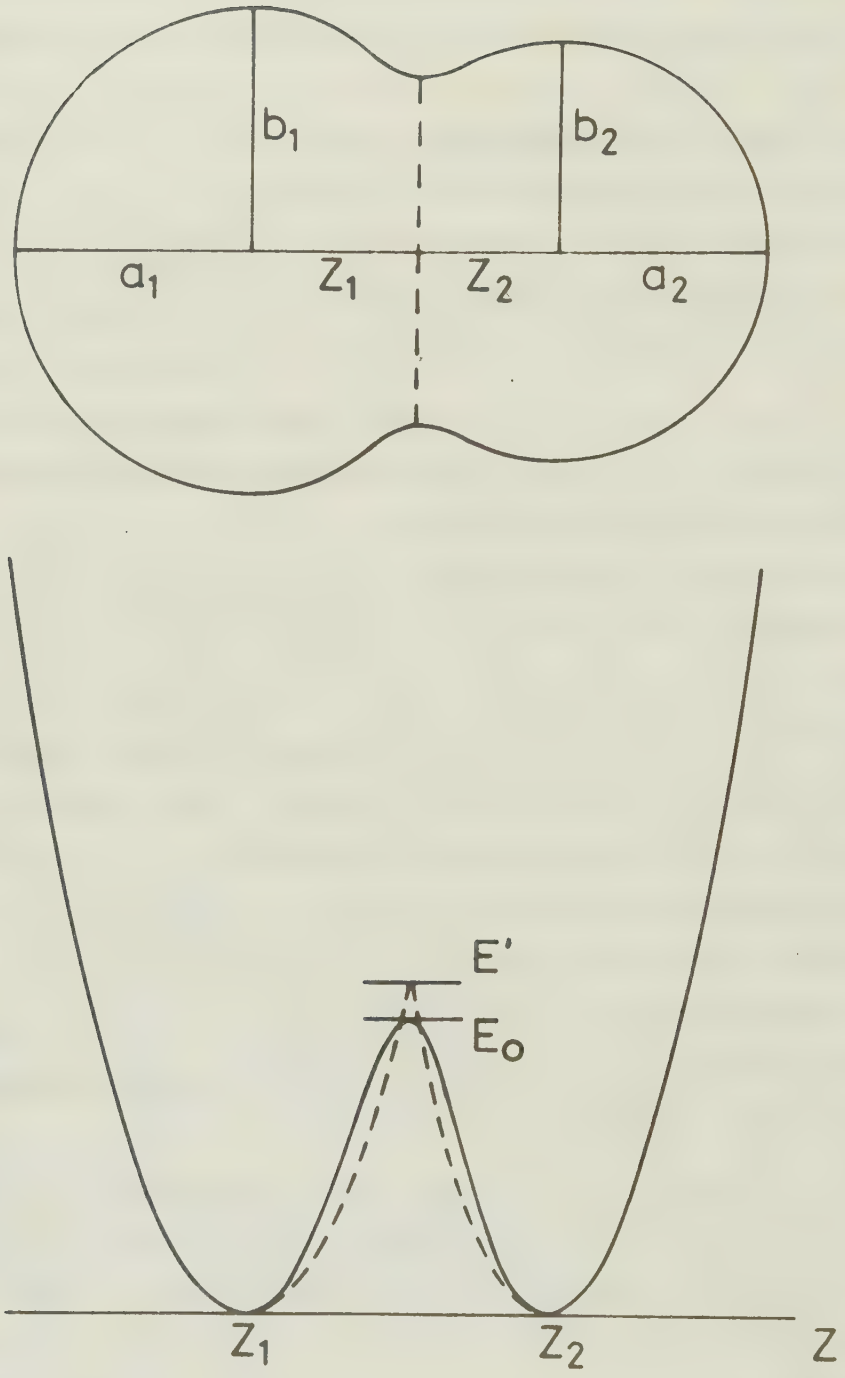

Fig. 1. Verlauf des Potentials und Kernform im asymmetrischen Zweizentrenmodell. Der Schnitt verläuft entlang der z-Achse, die die Symmetrieachse bildet.

zu bestimmen ist. Bei der Definition der Fragmentmassen ist eine gewisse Willkür möglich, solange die Fragmente noch zusammenhängen und damit ihre Masse nicht eindeutig festgelegt ist. Hier wurde als Definition der Fragmentmassen

$$A_i = a_i \cdot b_i^2 / r_0^3 , \quad i=1,2 \tag{2}$$

verwendet, die die Fragmente effektiv zu vollen Ellipsoiden ergänzt. r_0 ist dabei die Radiuskonstante

$$r_0 = 1.2249 \text{ fm}. \tag{3}$$

Durch diese Definition erhält man bei zusammenhängenden Fragmenten Massen, die größer sind, als dem geometrischen Volumen der Fragmente entspricht, aber die Tatsache, daß bei Zusammenfall der Zentren $A_1=A_2=A$ wird, ist von Vorteil bei der Extrapolation massenabhängiger Potentialparameter wie κ und μ. Bei ξ macht man dabei keinen Fehler, da der Nenner von Gl. 1 größer als A wird und der scheinbare Fehler sich somit bei Quotientenbildung herauskürzt.

Das Potential ist außerhalb der Zentren der Fragmente, die mit z_1 und z_2 bezeichnet werden, rein oszillatorförmig. In Zylinderkoordinaten (z,ρ,ϕ) mit der z-Achse in der Symmetrieachse des Kerns wird

$$V(z,\rho,\phi) = \frac{m}{2}\omega_i^2 \cdot (z-z_i)^2 + \frac{m}{2}\alpha_i^2 \cdot \rho^2 , \quad |z| > |z_i| \tag{4}$$

Dabei nimmt, wie in allen folgenden Gleichungen, der Index i die Werte 1 und 2 an, die das linke bzw. rechte Fragment kennzeichnen. Die Frequenzen ω_i und α_i hängen über

$$\alpha_i = \beta_i \cdot \omega_i \tag{5}$$

zusammen. m ist die Nukleonenmasse.

Zwischen den Fragmenten, d. h. für $|z|<|z_i|$, wird das Potential modifiziert, wobei Zusätze dritter und vierter Ordnung in z dafür sorgen, daß die Höhe des Halspotentials bei z = 0 variabel wird. Damit wird die Dicke des Halses frei

wählbar. Außerdem dienen die Zusatzpotentiale dazu, eine stetig differenzierbare Verbindung zwischen den Fragmenten zu schaffen. Der Ansatz lautet:

$$V(z,\rho,\phi) = \frac{\epsilon}{2}m\omega_i^2 z'^2(1-2z'/z_i+2(z'/z_i)^2) + \frac{m}{2}\alpha_i^2\rho^2(1+g_i z'^2), \quad 0<|z|<|z_i| \tag{6}$$

mit der Abkürzung $z'=z-z_i$.

Die Koeffizienten im ersten Summanden sind schon so bestimmt, daß der z-abhängige Teil des Potentials bei z=0 glatt ist und dort ein Maximum hat. Die Koeffizienten g_i werden ebenfalls aus dieser Forderung bestimmt. Nähere Einzelheiten findet man in [46].

Um alle im Potential vorkommenden Größen aus den freien Parametern zu errechnen, müssen noch zwei weitere Forderungen gestellt werden. Einmal muß festgelegt werden, welche Äquipotentialfläche die Kernoberfläche bilden soll, die für das zugeordnete Tropfenmodell genommen wird. Dazu wird angenommen, daß das Oberflächenpotential des Kerns unabhängig von der Deformation ist, also den gleichen Wert hat wie bei einem sphärischen Kern. Dieses Potential beträgt bekanntlich

$$V_0 = \frac{m}{2}\hbar\omega_0^2 R_0^2 \tag{7}$$

mit

$$\hbar\omega_0^2 = 41\ \text{MeV}\cdot A^{-1/3} \tag{8}$$

und

$$R_0 = r_0\cdot A^{1/3} = 1.2249\ \text{fm}\cdot A^{1/3}. \tag{9}$$

V_0 verknüpft die Frequenzen und Halbachsen gemäß

$$V_0 = \frac{1}{2}m\alpha_i^2 b_i^2 = \frac{1}{2}m\omega_i^2 a_i^2 . \tag{10}$$

Als zweite zusätzliche Bedingung wird Volumenerhaltung gefordert. Allerdings ist es bei dem hier verwendeten Potential nicht möglich, das Volumen jeder einzelnen Äquipotentialfläche zu erhalten. Deshalb wird nur gefordert, daß das Gesamtvolumen des zugeordneten Tropfens, d. h. das von der Äquipotentialfläche mit Oberflächenpotential umschlossene Volumen, während der Deformation konstant bleibt. Diese Annahme liefert bei Verwendung der Strutinsky-Methode nahezu die gleichen Ergebnisse für die Deformationsenergie wie eine exaktere Volumenerhaltung [47].

Ebenso wie in [46] wird die Volumenerhaltung durch ein numerisches Nullstellen-Suchverfahren gewährleistet. Da aber an Stelle des Zentrenabstandes $\Delta z = z_2 - z_1$ jetzt die Gesamtlänge λ des Kerns als freier Parameter verwendet wird, muß eine zweite Nullstellensuche zu gegebenen Werten von λ das entsprechende Δz liefern. Warum bei den jetzigen Rechnungen anstelle von Δz die Größe λ eingeführt wurde, ist in Kapitel 7 an Hand des Verhaltens des Tropfens erläutert.

3. Der Einteilchen-Hamiltonoperator und seine Diagonalisierung

Im Hamiltonoperator

$$H_{sp} = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) + V_{ls}(\vec{r},\vec{p}) + V_{l^2}(\vec{r},\vec{p}) \qquad (1)$$

sind außer der kinetischen Energie und dem schon im letzten Kapitel angegebenen ortsabhängigen Potential V ein verallgemeinerter Spin-Bahn-Term

$$V_{ls}(\vec{r},\vec{p}) = -\frac{\hbar}{m}\left\{\frac{\kappa_i}{\omega_{0i}}, (\nabla V\times\vec{p})\cdot\vec{s}\right\} \qquad (2)$$

sowie ein l^2-Term enthalten,

$$V_{l^2}(\vec{r},\vec{p}) = -\frac{\hbar}{2}\{\omega_{0i}\kappa_i\mu_i, l^2_{t_i}\}_{sym} + \hbar\kappa_i\mu_i\omega_{0i}\frac{N_i(N_i+3)}{2}\delta_{if} \qquad (3)$$

analog dem im Nilsson-Modell verwendeten Potential. κ_i,μ_i, und ω_{0i} werden für jedes Fragment aus dessen Massenzahl nach Gl. 2.2 bestimmt:

$$\kappa_i = \begin{Bmatrix}0.0509\\0.0768\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0.002\\-0.003\end{Bmatrix}\cdot A_i^{1/3} \qquad (4)$$

$$\mu_i = \begin{Bmatrix}0.919\\0.638\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}-0.095\\0.003\end{Bmatrix}\cdot A_i^{1/3} \qquad (5)$$

$$\omega_{0i} = 41\ \text{MeV}\cdot A_i^{-1/3} \qquad (6)$$

Die Interpolation von κ und μ ist von Gustafsson [48] angegeben worden. Der obere Wert gilt für Neutronen, der untere für Protonen.

Da κ_i, μ_i und ω_{0i} Funktionen des Ortes sind, sind sie nicht mit dem Impulsoperator vertauschbar, so daß die Potentiale durch explizite Symmetrisierung hermitesch gemacht werden müssen. Bei V_{ls} genügt dazu ein Antikommutator, aber in V_{l^2} tritt der gestreckte Drehimpulsoperator (s. [3]) auf, der sich in den Fragmenten auf das jeweilige Zentrum bezieht und damit

bei z=0 unstetig wird. Dann ist die Symmetrisierung durch einen Antikommutator nicht mehr ausreichend, wie von Lustig [49] gezeigt wurde. Die Matrixelemente müssen dann einzeln symmetrisiert werden, was in Gl. 3 durch den Index 'sym' angedeutet wurde.

Beide Terme wurden so gewählt, daß sie bei einem rein Nilsson-artig deformierten Kern in die üblicherweise verwendeten ls bzw. l^2-Terme übergehen. Während dies aber beim ls-Term in ganz natürlicher Weise durch die Substitution $l \rightarrow (\nabla V \times \vec{p})$ erreicht wird, ist eine ähnliche Substitution beim l^2-Term nicht möglich [50,51].

Im zweiten Summanden von V_{l^2}, der rein diagonal ist, wird die Hauptquantenzahl N des sphärischen Schalenmodells durch den analogen Ausdruck im Zweizentrenoszillator

$$N_i = n_{zi} + N_\rho \tag{7}$$

ersetzt. Auch dieser Term stammt schon aus dem Nilsson-Modell, wo er dazu dient, den Schwerpunkt einer Hauptschale bei Hinzunahme des l^2-Terms zu erhalten. Die Quantenzahlen n_{zi} und N_ρ werden unten erläutert.

Der Hamiltonoperator von Gl. 1 wird in der Basis des sog. Zweizentrenoszillators [9] diagonalisiert. Dieser hat den Hamiltonoperator

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{m}{2}\omega_i^2 \cdot z'^2 + \frac{m}{2}\omega_\rho^2 \rho^2, \tag{8}$$

den man als Spezialfall von Gl. 1 erhalten kann, indem man die Terme höherer als zweiter Ordnung in z' wegläßt und $\alpha_1 = \alpha_2 = \omega_\rho$ setzt. Außerdem muß $\kappa_i = g_i = 0$ und $\varepsilon = 1$ gesetzt werden. Die beiden Frequenzen α müssen gleich gesetzt werden, damit man analytische Lösungen erhalten kann. Das Potential ist zwar für $\alpha_1 \neq \alpha_2$ auch noch rein oszillatorförmig, aber nur unter dieser Einschränkung separiert die Schrödingergleichung und man erhält Lösungen der Form

$$\Psi(z,\rho,\phi) = \langle z\ \rho\ \phi \mid n_z\ N_\rho\ n_\phi \rangle = \phi_{n_z}(z)\ \chi_{N_\rho n_\phi}(\rho)\ \eta_n(\phi) \tag{9}$$

mit

$$\phi_{n_{zi}}(z) = A_i^{-1} \cdot U(-n_{zi}-1/2,\ \mathrm{sgn}(z_i)\ \sqrt{2k_{zi}}(z-z_i)) \qquad (10)$$

$$\chi_{N_\rho n_\phi}(\rho) = B^{-1} \cdot k^{(n_\rho+1)/2} \exp(-\tfrac{1}{2}k_\rho\rho^2) \cdot \rho^{|n_\phi|} \cdot \cdot L^{|n_\phi|}_{(N_\rho-|n_\phi|)/2}(k_\rho\rho^2) \qquad (11)$$

$$\eta_{n_\phi}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(in_\phi\cdot\phi) \qquad (12)$$

$$k_{zi} = m\omega_i/\hbar\ , \qquad k_\rho = m\omega_\rho/\hbar\ . \qquad (13)$$

Dabei sind A_i und B Normalisierungskonstanten, L bezeichnet die Laguerreschen Polynome und U die parabolischen Zylinderfunktionen. Eine Zusammenstellung der Eigenschaften dieser Funktionen findet man z. B. in [52].

Die Quantenzahl n_ϕ nimmt alle ganzzahligen Werte an; sie entspricht der z-Komponente des Drehimpulses. N_ρ nimmt die Werte $|n_\phi|$, $|n_\phi|+2$, $|n_\phi|+4$,... an und die n_{zi} müssen numerisch bestimmt werden. Da die Funktionen aus Gl. 10 schon für $|z|\to\infty$ verschwinden, werden die n_{zi} aus der Forderung nach Stetigkeit bei z=0 bestimmt. n_z nimmt in den beiden Fragmenten verschiedene Werte an, die über die Einteilchenenergie

$$E = \hbar\omega_i\cdot(n_{zi}+1/2) + \hbar\omega_\rho\cdot(N_\rho+1)\ ,\ i=1,2 \qquad (14)$$

verknüpft sind.

Da im Hamiltonoperator nach Gl. 1 auch spinabhängige Terme auftreten, müssen die Basisfunktionen noch durch Spinfunktionen ergänzt werden. Wegen des ls-Terms sind l_z und s_z keine guten Quantenzahlen mehr und die Basisfunktionen können nur noch nach der z-Komponente des Gesamtdrehimpulses

$$\Omega = n_\phi + s_z \qquad (15)$$

klassifiziert werden.

Die Parameter im Basis-Hamiltonoperator (Gl. 8) werden so bestimmt, daß er möglichst weitgehend mit dem vollständigen Operator nach Gl. 1 übereinstimmt. Dazu werden ω_i und z_i aus Gl. 1 übernommen und

$$\omega_\rho = (\alpha_1 + \alpha_2)/2 \qquad (16)$$

gesetzt. Im Gegensatz zu dem in [46] gegebenen Verfahren erwies sich diese Wahl bei den betrachteten Deformationen als relativ günstig für die Konvergenz der Diagonalisierung.

Die auftretenden Matrixelemente sind in [46] ausführlich abgeleitet und werden in Anhang A noch einmal zusammengestellt.

Einen Eindruck von der Struktur des Einteilchenspektrums vermitteln die Figuren 2 und 3. Darin sind die Einteilchenniveaus für den Fall sphärischer Fragmente ohne bzw. mit ls- und l^2-Termen dargestellt, und zwar als Funktionen des Zentrenabstandes Δz. Offensichtlich erhält man die Grenzfälle korrekt reproduziert: für $\Delta z = 0$ das Spektrum eines sphärischen Oszillators und für Δz sehr groß die sich überlagernden Spektren zweier solcher Oszillatoren mit verschiedenem Schalenabstand, gekennzeichnet durch 'H' für das schwerere und 'L' für das leichtere Fragment.

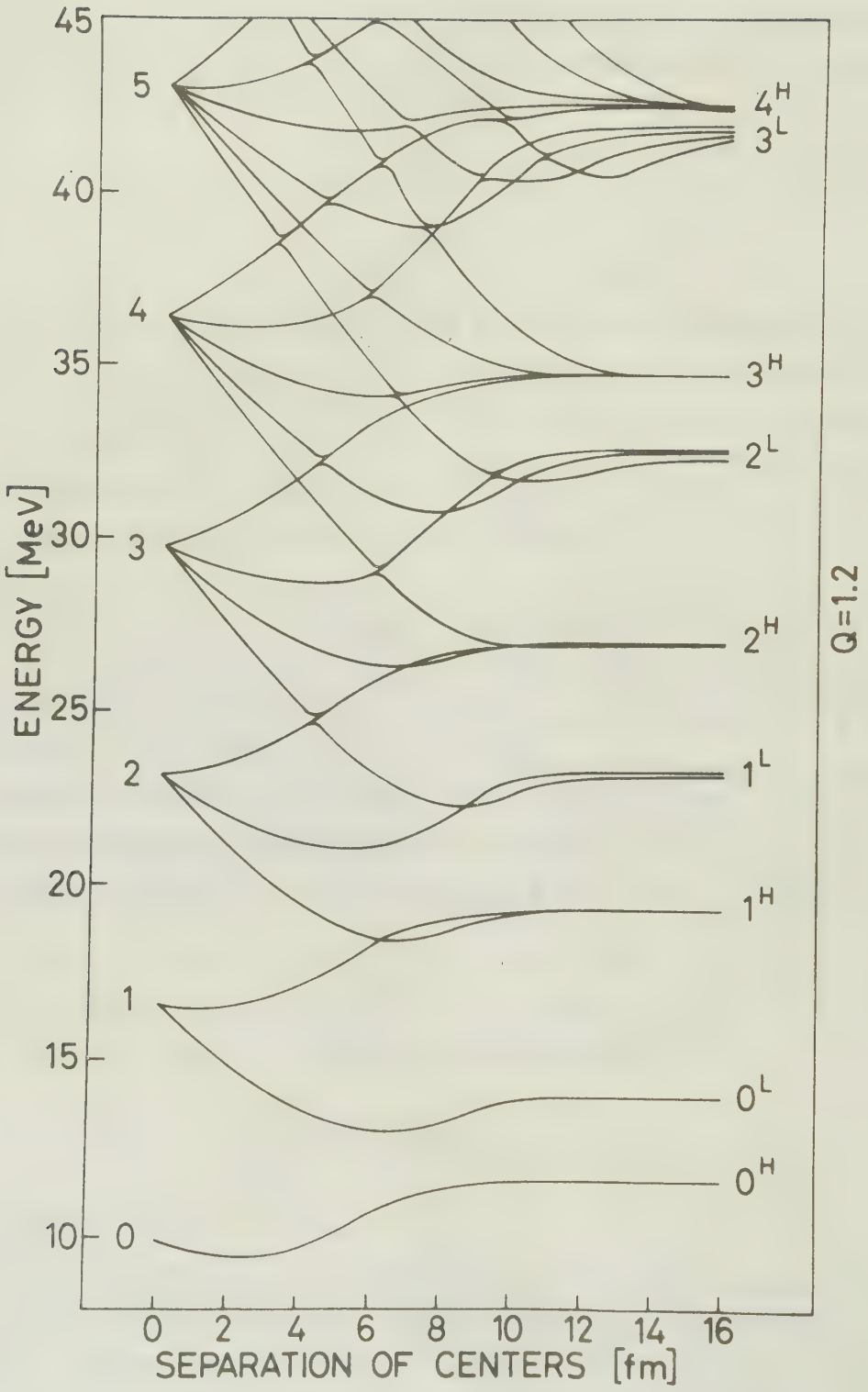

Fig. 2. Einteilchenniveaus im asymmetrischen Zweizentrenmodell in Abhängigkeit von der Zentrenseparation. Ohne ls- und l^2-Term.

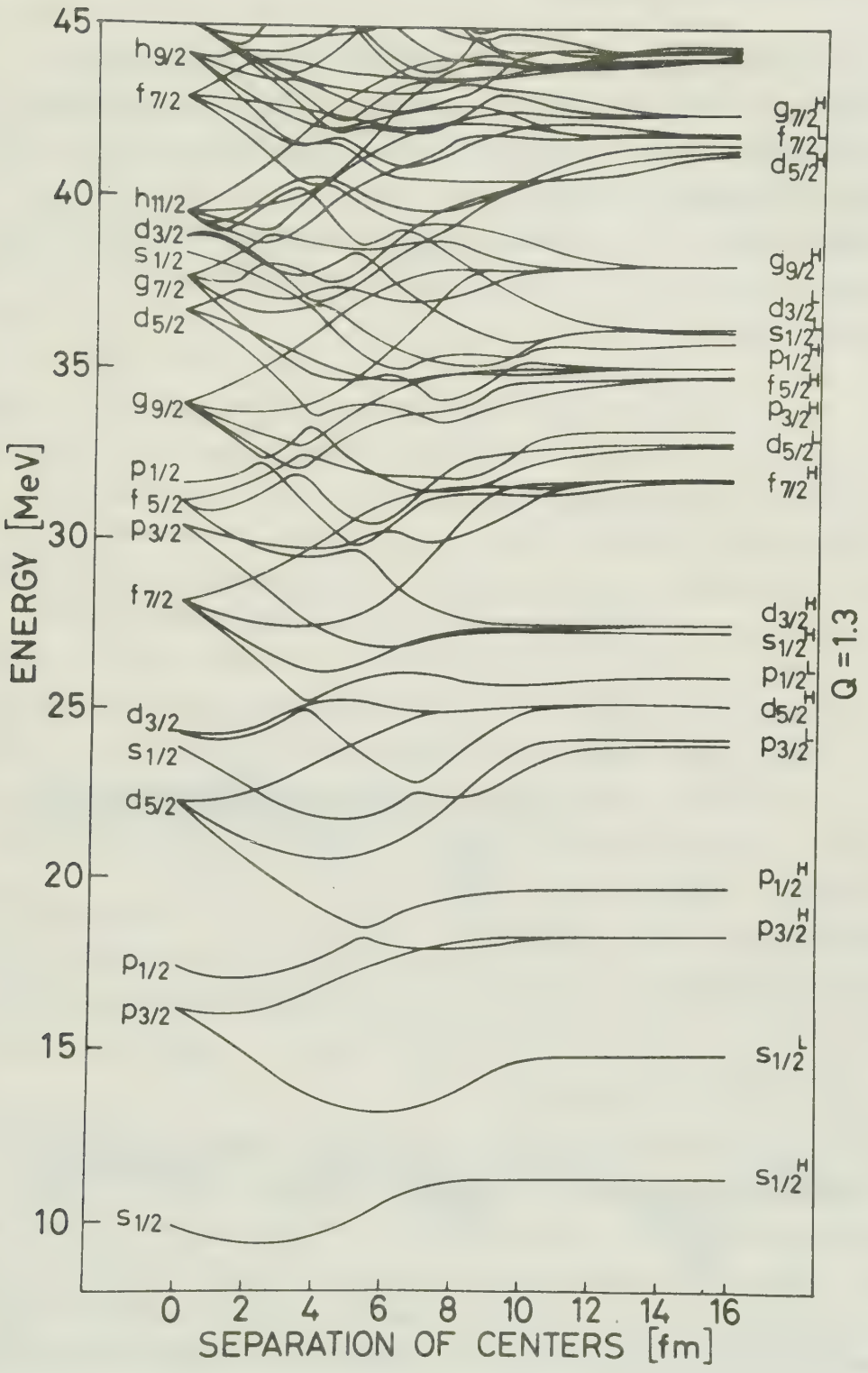

Fig. 3. Einteilchenniveaus im asymmetrischen Zweizentrenmodell in Abhängigkeit von der Zentrenseparation. Mit ls- und l^2-Term.

4. Das Strutinsky-Verfahren

Um die Gesamtenergie von A unabhängigen Teilchen, die sich in einem Schalenmodellpotential bewegen, zu berechnen, hat man die Einteilchenenergien aufzusummieren. Da man üblicherweise die Coulombwechselwirkung zwischen den Protonen vernachlässigt, muß deren Effekt durch eine klassisch berechnete Coulombenergie, die man zur Summe der Einteilchenenergien hinzufügt, berücksichtigt werden. Damit wird

$$E = \sum_{i=1}^{A} \varepsilon_i + E_{coul} , \qquad (1)$$

wenn die Einteilchenenergien mit ε_i bezeichnet werden.

Es zeigt sich jedoch, daß Gl. 1 selbst bei Verwendung von Potentialen endlicher Tiefe völlig unrealistische Ergebnisse liefert. Man kann nun argumentieren, daß das Schalenmodell ja eigentlich kein externes Potential ist, sondern sich aus den Zweiteilchenwechselwirkungen in selbstkonsistenter Weise zusammensetzt. Dann hätte man etwa analog der Hartree-Fock-Theorie von Gl. 1 die Hälfte der Zweiteilchenwechselwirkungen abzuziehen [53,54]. Das scheint aber nach bisher vorliegenden Rechnungen auch mit Schwierigkeiten verbunden zu sein.

Physikalisch kann man dieses Versagen des Schalenmodells bei der Berechnung von Gesamtenergien dadurch verstehen, daß das Schalenmodell die Kernstruktur nur in der Nähe der Fermienergie gut reproduziert, aber die inneren, abgeschlossenen Schalen weniger gut beschreibt.

Für die Berechnung der Deformationsenergie würde man zunächst erwarten, daß der Beitrag der inneren Schalen relativ konstant ist und somit in der Energiedifferenz zum Grundzustand wegfällt. Leider ist das aber im Schalenmodell keineswegs der Fall, da sich auch die unteren Niveaus mit der Deformation erheblich verschieben, und wenn ihr Betrag auch im Mittel gleich bleiben sollte, so können doch schon Prozenteffekte in der Gesamtenergie die Deformationsenergie völlig ändern.

Es wäre also wünschenswert, das Schalenmodell nur zur Berechnung der Effekte heranzuziehen, die von den Fluktuationen der Niveaustruktur an der Fermikante herrühren, und den relativ.

glatten Anteil der inneren Schalen aus einem anderen Modell, das ihn realistischer beschreibt, zu ergänzen.

Ein Modell, das sich für diesen Zweck anbietet, ist das Tropfenmodell. Wie man in Fig. 4 erkennt, gibt das Tropfenmodell die Bindungsenergien der Kerne in einem großen Bereich der Massenzahl bis auf ca. ±10 MeV genau wieder. Die noch verbleibenden Diskrepanzen zeigen eine deutliche Systematik, in der man die magischen Zahlen als Stellen stärkerer Bindung erkennen kann. Es liegt also nahe, diese Effekte in der Bindungsenergie auf die Schalenstruktur zurückzuführen. Die Differenz zwischen der experimentellen Bindungsenergie und der aus dem Tropfenmodell berechneten bezeichnet man als experimentelle Schalenkorrektur

$$\delta U_{exp} = E_{LDM} - E_{exp} \qquad (2)$$

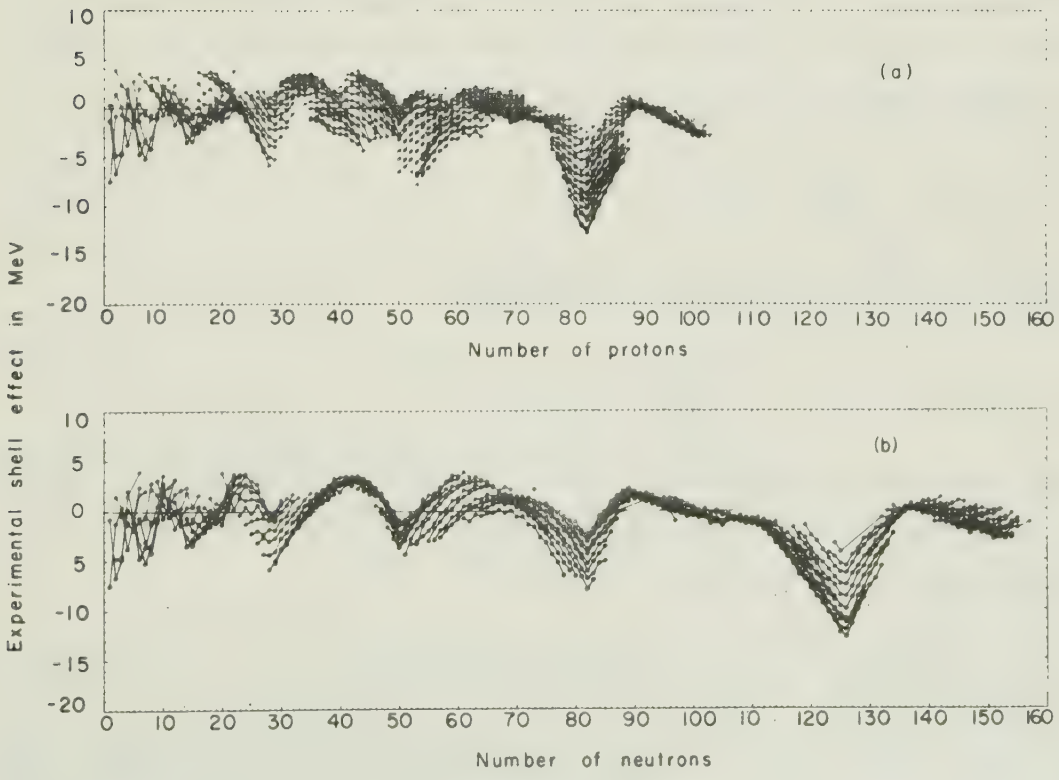

Fig. 4. Experimentelle Schalenkorrekturen in Abhängigkeit von Protonen- und Neutronenzahl (aus [55]).

δU_{exp} sollte aus dem Schalenmodell ableitbar sein. Zuerst wurde die Idee von Myers und Swiatecki [55,56] dazu benutzt, Tropfenmodellfits zu verbessern, indem phänomenologisch angesetzte Schalenkorrekturen hinzugefügt wurden. Dabei nahmen sie an, daß die Schalenkorrekturen bei wachsender Deformation rasch gegen Null gehen, da dann scheinbar die hohe Entartung der Niveaus des sphärischen Oszillators schnell verloren geht und eine gleichförmige Niveaustruktur ohne besondere Lücken oder Verdichtungen entsteht.

Strutinsky [14,15] gab nun erstmals ein Verfahren an, das es erlaubte, die Schalenkorrekturen aus den theoretisch berechneten Einteilchenniveaus abzuleiten. Dazu ging er von der Überlegung aus, daß das Tropfenmodell eine glatte Abhängigkeit der Energie von der Massenzahl und der Deformation beschreibt, während die Schalenkorrekturen den oszillierenden Rest liefern sollten, der von den Niveaus an der Fermikante abhängt.

Die Summe der Einteilchenenergien enthält nun solche Oszillationen und zusätzlich den sich langsam ändernden Anteil der inneren Schalen. Nennt man diesen letzteren glatten Teil $\tilde{E}$, so könnte man als theoretische Schalenkorrektur

$$\delta U = \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} - \tilde{E} \qquad (3)$$

ansetzen und hätte für die Gesamtenergie analog Gl. 2

$$E = E_{LDM} + \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} - \tilde{E} \; . \qquad (4)$$

Natürlich ist noch anzugeben, wie $\tilde{E}$ eigentlich berechnet werden soll. Nach dem oben gesagten sollte $\tilde{E}$ eigentlich durch eine Glättung über die Massenzahl, etwa nach

$$\tilde{E}(A) = \sum_{A'} \left(\sum_{\nu} \varepsilon_{\nu}(A') \right) \cdot w(A'-A) \qquad (5)$$

zu berechnen sein, wobei w eine Gewichtsfunktion ist, die etwa im Bereich der Breite einer Hauptschale exponentiell mit der Größe $(A'-A)^2$ abklingt. Da die Oszillationen in δU etwa die Breite einer Hauptschale haben, sollten sie dann in $\tilde{E}$ herausgeglättet sein.

Aus praktischen Gründen wird die Glättung über die Massenzahl allerdings durch eine Glättung über die Energie ersetzt. Eine Änderung der Massenzahl entspricht ja einer Änderung der Besetzung der Einteilchenniveaus, also einer Verschiebung der Fermikante in der Energie. Deshalb kann man die Abhängigkeit von der Massenzahl auch näherungsweise glätten, indem man die richtige Schalenmodell-Niveaudichte

$$g(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i) \qquad (6)$$

durch eine 'verschmierte' Dichte

$$\tilde{g}(\varepsilon) = \frac{1}{\tilde{\gamma}} \sum_{i=1}^{\infty} f\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{\tilde{\gamma}}\right) \qquad (7)$$

ersetzt. f ist eine Funktion, die exponentiell in $(\varepsilon-\varepsilon_i)^2$ abklingt. In Strutinskys Originalarbeit [14,15] wird

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot P(x) \cdot \exp(-x^2/2) \qquad (8)$$

verwendet. P ist ein Korrekturpolynom, das die langreichweitigen Oszillationen der Niveaudichte erhalten soll. Die Wahl der Funktion f ist bis zu einem gewissen Grade willkürlich - wie es auch physikalisch sein sollte -; genauere Untersuchungen findet man in [22]. Hier werden die Ergebnisse von Tsang [52] über das Polynom P übernommen.

Für die kontinuierliche Verteilung $\tilde{g}$ ist nun auch die Fermikante $\tilde{\lambda}$ aus der Anzahl der Teilchen

$$n = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \tilde{g}(\varepsilon) d\varepsilon \qquad (9)$$

zu bestimmen. Die Rechnung wird für Protonen und Neutronen getrennt durchgeführt, so daß n=N bzw. n=Z einzusetzen ist; die gesamte Schalenkorrektur ist dann die Summe der Korrekturen für die beiden Teilchenarten.

Die 'glatte' Gesamtenergie ist nun

$$\tilde{E} = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} g(\varepsilon) d\varepsilon \quad , \qquad (10)$$

und damit wird

$$\delta U = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i - \int_{\infty}^{\tilde{\lambda}_p} \varepsilon g_p(\varepsilon)d\varepsilon - \int_{\infty}^{\tilde{\lambda}_n} \varepsilon g_n(\varepsilon)d\varepsilon \ , \quad (11)$$

wobei die Trennung in den Anteil der Protonen (p) und den der Neutronen (n) noch einmal hervorgehoben wurde.

In diesen Ausdrücken ist allerdings noch ein undefinierter Parameter, nämlich die Verschmierungsbreite $\tilde{\gamma}$, enthalten. Wenn die Theorie konsistent sein soll, dann darf das Ergebnis nicht stark von $\tilde{\gamma}$ abhängen, wenn $\tilde{\gamma}$ in einem sinnvollen Bereich variiert.

Tatsächlich findet man für Oszillatorpotentiale, daß im Bereich $1.2 \cdot \hbar\omega_0 \leq \tilde{\gamma} \leq 2\hbar\omega_0$ die Schalenkorrektur sehr gut konstant bleibt (bis auf weniger als 0.2 MeV). Für andere Potentiale, insbesondere solche endlicher Tiefe, gilt das aber nicht mehr, so daß man dann andere Vorschriften zur Bestimmung von $\tilde{\gamma}$ finden muß. [58,22].

Diese ursprüngliche Strutinskysche Version der Schalenkorrekturmethode hat sich in der Praxis als außerordentlich erfolgreich erwiesen. Bei Verwendung des Nilsson-Modells stimmen die theoretischen Schalenkorrekturen bis auf etwa 20% mit den experimentellen überein, so daß die Diskrepanz zwischen den gemessenen und den berechneten Bindungsenergien auf etwa 2MeV maximal reduziert wird. Auch die Grundzustandsdeformationen werden gut reproduziert [59].

Ein neuer Effekt, der erst mit den Schalenkorrekturen erklärt werden konnte, ist die Existenz von Spaltisomeren und Resonanzen im Wirkungsquerschnitt für induzierte Spaltung [60, 61]. Im Gegensatz zu den heuristischen Schalenkorrekturen von Myers und Swiatecki [56] klingen nämlich die Strutinskyschen keineswegs mit der Deformation stark ab, sondern zeigen ein oszillatorisches Verhalten, das durch Lücken bzw. Stellen hoher Niveaudichte auch bei größeren Deformationen hervorgerufen wird. Dieser Effekt ist in Fig. 5 angedeutet. Fig. 6 zeigt, wie die Addition von oszillierenden Schalenkorrekturen zu einer Spaltbarriere aus dem Tropfenmodell ein zweites Minimum auf dem Spaltweg produzieren kann, in dem ein isomerer Zustand sich

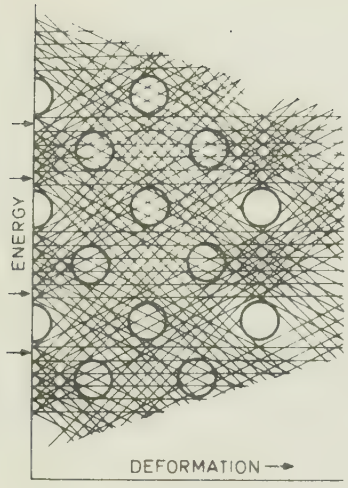

Fig. 5. Schematische Darstellung des Entstehens von Lücken und Stellen hoher Dichte im Einteilchenspektrum auch bei starker Deformation.

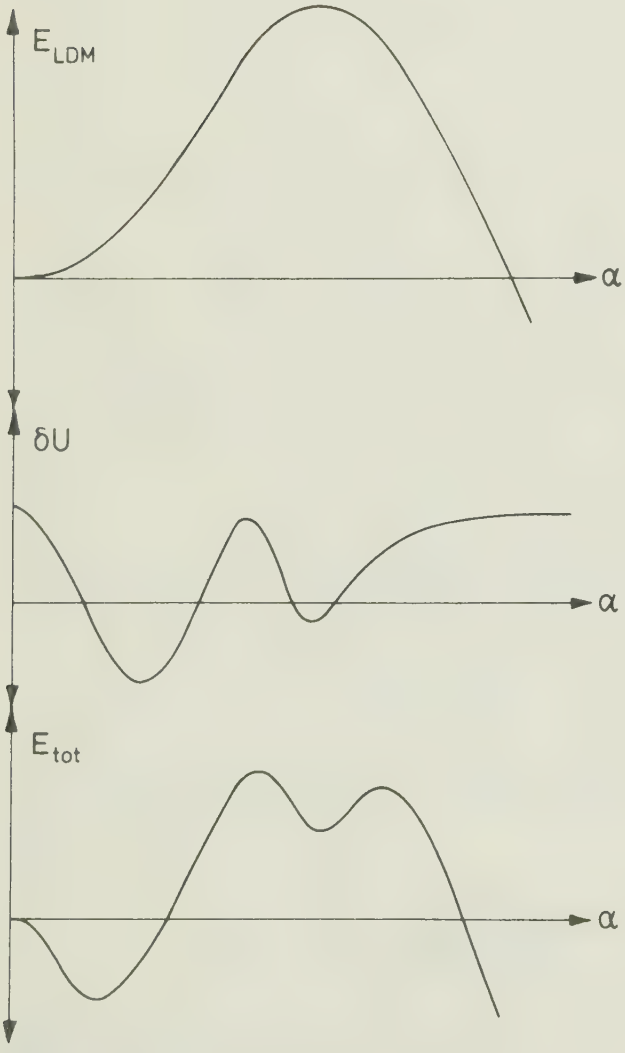

Fig. 6. Qualitative Erklärung des Entstehens einer Spaltbarriere mit zweitem Minimum aus Tropfenmodelldeformationsenergie E_{LDM} und Schalenkorrektur δU.

ausbilden kann.

Nicht zuletzt ist es unter der Verwendung der Strutinsky-Methode gelungen, die Grundzustandsdeformationen, Spaltbarrieren und die Lage der Maxima in der Massenausbeute bei der Spaltung für eine große Zahl von Kernen quantitativ zu erklären [23-28,59, 62-64].

Grade dieser große Erfolg der Methode in Verbindung mit ihrer theoretisch völlig unzureichenden Fundierung hat in der letzten Zeit sehr viele Versuche hervorgerufen, sie etwas besser zu begründen [16-22].

Einen ausführlichen Review-Artikel über die Methode und ihre Anwendungen findet man in [20]. Wenn auch die Grundlagen der Methode immer noch nicht zufriedenstellend geklärt sind, so ist doch die Ableitung besonders aus einem Hartree-Fock-Verfahren schon ziemlich weit vorangeschritten, so daß man nicht nur auf eine bessere Begründung, sondern vielleicht auch auf Hinweise für mögliche Verbesserungen der Methode hoffen darf.

Mehrfach wurden auch Versuche unternommen, eine Schalenkorrekturmethode auf gänzlich anderer Grundlage, etwa dem Verhalten des Kerns bei hohen Anregungstemperaturen, aufzubauen [65-67]. Diese Versuche sind jedoch noch nicht völlig befriedigend, wenn auch in einigen Fällen numerische Übereinstimmung mit Strutinsky-Ergebnissen erzielt wurde.

Vergleiche der Strutinsky-Methode mit Hartree-Fock-Rechnungen zeigen grobe Übereinstimmung [68,69], ein endgültiges Urteil läßt sich aber noch nicht fällen. Hinderlich ist dabei besonders die Tatsache, daß es nur sehr wenige Hartree-Fock-Rechnungen für schwerere Kerne gibt; auch für das Zweizentrenmodell werden erst in neuester Zeit erste Rechnungen dieser Art durchgeführt [70,71].

5. Die Paarkraft-Korrektur

Zur Berechnung der Korrektur zur Gesamtenergie, die von der Paarkraft hervorgerufen wird, wurde die BCS-Theorie (s. z. B. [72]) verwendet. Sie enthält zwei freie Parameter, nämlich die Paarkraftstärke G und die Anzahl von Niveaus um die Fermikante, die bei der Paarkraftrechnung berücksichtigt werden, n_c. Die Gap-Gleichung

$$\frac{2}{G} = \sum_{i=n-n_c}^{n+n_c} \{(\varepsilon_i - \lambda)^2 + \Delta^2\}^{-1/2} \qquad (1)$$

liefert in Verbindung mit der Erhaltung der Teilchenzahl

$$N = 2 \sum_i v_i^2 \quad , \qquad (2)$$

wo v_i die Besetzungswahrscheinlichkeit des i-ten Niveaus ist,

$$v_i^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_i - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_i - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right) \quad , \qquad (3)$$

die Fermikante λ und die Energielücke (Gap) Δ.

Ähnlich wie im Strutinsky-Verfahren für die Summe der Einteilchenenergien sollte der 'glatte' Anteil aus der Paarkraft-Korrektur herausgezogen werden, da man annimmt, daß er schon in der Tropfenmodell-Energie enthalten ist. Den glatten Anteil der Paarkraft kann man durch eine mittlere Energielücke

$$\tilde{\Delta} \simeq 12 \text{ MeV} \cdot A^{-1/3} \qquad (4)$$

charakterisieren [20], die in eine zu Gl. 1 analoge 'glatte' Gap-Gleichung eingeht:

$$\frac{2}{G} = \int_{\tilde{\lambda}-\Omega}^{\tilde{\lambda}+\Omega} \frac{\tilde{g}(\varepsilon)\, d\varepsilon}{\sqrt{(\varepsilon - \tilde{\lambda}) + \Delta^2}} \qquad (5)$$

Dabei hängt Ω mit der Niveauanzahl n_c über die einleuchtende Beziehung

$$n_c = \tilde{g}(\tilde{\lambda}) \cdot \Omega \qquad (6)$$

zusammen.

Unter der Annahme, daß $\tilde{g}$ in dem Intervall $(\tilde{\lambda}-\Omega,\tilde{\lambda}+\Omega)$ annähernd konstant ist, kann man das Integral aus Gl. 5 auswerten und erhält

$$\frac{2}{G} = 2\cdot\tilde{g}(\tilde{\lambda})\,\ln(2\Omega/\tilde{\Delta}) \; . \qquad (7)$$

Subtrahiert man Gl. 7 von Gl. 1, dann fällt die Paarkraftstärke heraus und es bleibt die Gleichung

$$\sum_{i=n-n_c}^{n+n_c} \{(\varepsilon_i-\lambda)^2 + \Delta^2\}^{-1/2} - 2\tilde{g}(\tilde{\lambda})\ln(2\Omega/\tilde{\Delta}) = 0 \; . \qquad (8)$$

Die Lösungen dieser Gleichung mit der Nebenbedingung (2) bzw. dem glatten Analogon dazu hängen nun, wie Brack u. a. [20] nachwiesen, praktisch nicht mehr von n_c und Ω ab, so daß der mittlere Gap $\tilde{\Delta}$ als einziger Parameter übrigbleibt. Voraussetzung ist allerdings, daß $\Omega >> \tilde{\Delta}$ gilt. Der Wert Ω= 10 MeV liefert in allen interessierenden Fällen gute Resultate.

Die Paarkraftkorrektur zur Gesamtenergie ist die Differenz zwischen Summe der Einteilchenenergien mit bzw. ohne Paarkraftwechselwirkung:

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2\,\varepsilon_i \qquad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \; - \Delta^2/G \qquad (9)$$

Ebenso wie bei der Schalenkorrektur wird die Rechnung für Protonen und Neutronen getrennt durchgeführt.

Um analog dem Strutinskyschen Verfahren den oszillierenden Anteil herauszuziehen, ist von Gl. 9 nur noch der glatte Anteil

$$\tilde{P} = -\frac{1}{2}\,\tilde{g}(\tilde{\lambda})\cdot\tilde{\Delta}^2 \qquad (10)$$

abzuziehen:

$$\delta P = P - \tilde{P} \; . \qquad (11)$$

Die renormierte Paarkraftkorrektur (11) ist in ihrem Ver-

halten der Schalenkorrektur sehr ähnlich. Sie oszilliert in analoger Weise, neigt aber dazu, bei großer Niveaudichte an der Fermikante negativere und bei geringer Niveaudichte positivere Werte anzunehmen. Ein Extremfall ist $P=0$, $\delta P=-\tilde{P}>0$ bei Nichtexistenz der BCS-Lösung. Die Paarkraft wirkt also der Schalenkorrektur entgegen und dämpft deren Oszillationen. Da sie jedoch viel kleiner ist als diese, spielt sie in den Potentialenergieflächen eine relativ geringere Rolle. Dagegen wird die Paarkraft von überragender Bedeutung für die Massenparameter (s. Kapitel 7).

6. Das Tropfenmodell

Das Tropfenmodell ist von seiner Entstehung her wohl das älteste aller Kernmodelle und wurde zuerst zur Erzeugung von Massenformeln verwendet [73]. Die Gesamtenergie des Kerns wird als die eines homogen geladenen Tropfens angesehen. Hier ist nur der Teil der Energie von Interesse, der deformationsabhängig ist, nämlich die Coulomb- und Oberflächenenergie. Dann ist die Deformationsenergie relativ zum (sphärischen) Grundzustand

$$E_{LDM} = E_S - E_S^0 + E_C - E_C^0 \quad , \tag{1}$$

wobei E_S die Oberflächenenergie und E_C die Coulombenergie bezeichnet. Der Index 0 gibt diese Größen im Grundzustand an. Die Oberflächenenergie wird nach

$$E_S = C_S \cdot (1 - \kappa_S \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2) \cdot S/S^0 \tag{2}$$

berechnet. S ist die geometrische Oberfläche des Kerns und die Konstanten C_S und κ_S haben die Werte

$$C_S = 17.9439, \quad \kappa_S = 2.53 \quad . \tag{3}$$

Der Wert von C_S stammt von Myers und Swiatecki [56], die für κ_S den Wert 1.79 angeben. Nilsson u. a. fanden aber, daß bei der Berechnung von Spaltbarrieren mit Hilfe der Schalenkorrekturmethode der oben angegebene Wert bessere Ergebnisse liefert [74]. Als dritter Parameter geht auch die Radiuskonstante r_0 aus Gl. 2.3 in das Tropfenmodell ein.

Wie schon in Kapitel 4 erwähnt wurde, gibt das Tropfenmodell den groben Verlauf der Deformationsenergie wieder, es versagt aber bei den Details wie den deformierten Grundzuständen und den exakten Höhen der Spaltbarrieren und liefert außerdem nur symmetrische Spaltung. Man erhält zwar für einen Fissilitätsparameter

$$\xi = \frac{Z^2/A}{(Z^2/A)_{cr}} \simeq \frac{Z^2/A}{50} \tag{4}$$

von mehr als 0.38 (das entspricht etwa Ruthenium) eine Instabilität gegenüber asymmetrischen Deformationen an der Barriere, aber diese Instabilität bedeutet nur, daß das eine Fragment vom anderen geschluckt wird.

Die Figuren 7-10 geben einen Überblick über das Verhalten der Tropfenmodell-Deformationsenergie im Zweizentrenmodell. Sie wurden für ^{236}U gerechnet.

Fig. 7 zeigt eine Potentialenergiefläche in Abhängigkeit von λ und ε, für gleich große und sphärische Fragmente (d. h. $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\xi = 0$). Offenbar bevorzugt der Tropfen für $\lambda<1.4$ rein ovaloide Deformationen ($\varepsilon=0$), schnürt sich aber dann rasch ein. Die Folge von Kernformen, die etwa einem Spaltweg nach Fig. 7 entspricht, ist in Fig. 8 dargestellt.

Bemerkenswert ist, daß dann, wenn das System sich nicht vom Grundzustand bei $\lambda=1$, sondern von sehr großen λ her in die Fläche bewegt, ein völlig anderer Weg gewählt wird. Es passiert dann nicht die Barriere bei $\lambda=1.4$, sondern läuft an ihr entlang zu größeren ε-Werten hin. Physikalisch bedeutet das, daß bei Schwerionenstößen, wenn sich die Kerne aus dem Unendlichen nähern, die Coulombabstoßung zu einer Abplattung führt. Das gilt aber nur in der statischen Näherung, da in der Praxis die Kerne kaum Zeit dazu haben, sich derart zu verformen [75].

Die beiden folgenden Potentialenergieflächen sind bei $\lambda=1.8$ gerechnet. In Fig. 9 mit ε und ξ als Variablen und $\beta_1=\beta_2=1$ erkennt man die verschiedenen Wege für Spaltung und Schwerionenreaktionen sehr deutlich. Für große ε-Werte sinkt die Energie zum 'Schwerionental' hin ab, während der Spaltweg bei $\varepsilon=0.15$ verläuft, davon durch eine Barriere getrennt, die mit wachsender Asymmetrie ansteigt.

Die Abhängigkeit der Tropfenenergie von den Deformationen der Fragmente ist in Fig. 10 dargestellt. Das Minimum liegt, wie nicht anders zu erwarten, bei $\beta_1=\beta_2=1$ und die Energie steigt nach allen Seiten langsam an. Für stark oblate Deformationen der Fragmente wird allerdings ein Nachteil der hier benutzten Parametrisierung der Kernoberfläche sichtbar: die Energie sinkt plötzlich wieder stark ab, da bei festgehaltener Gesamtlänge die stark oblaten Fragmente sich bei zunehmend oblater Deformation effektiv voneinander entfernen. Dieser uner-

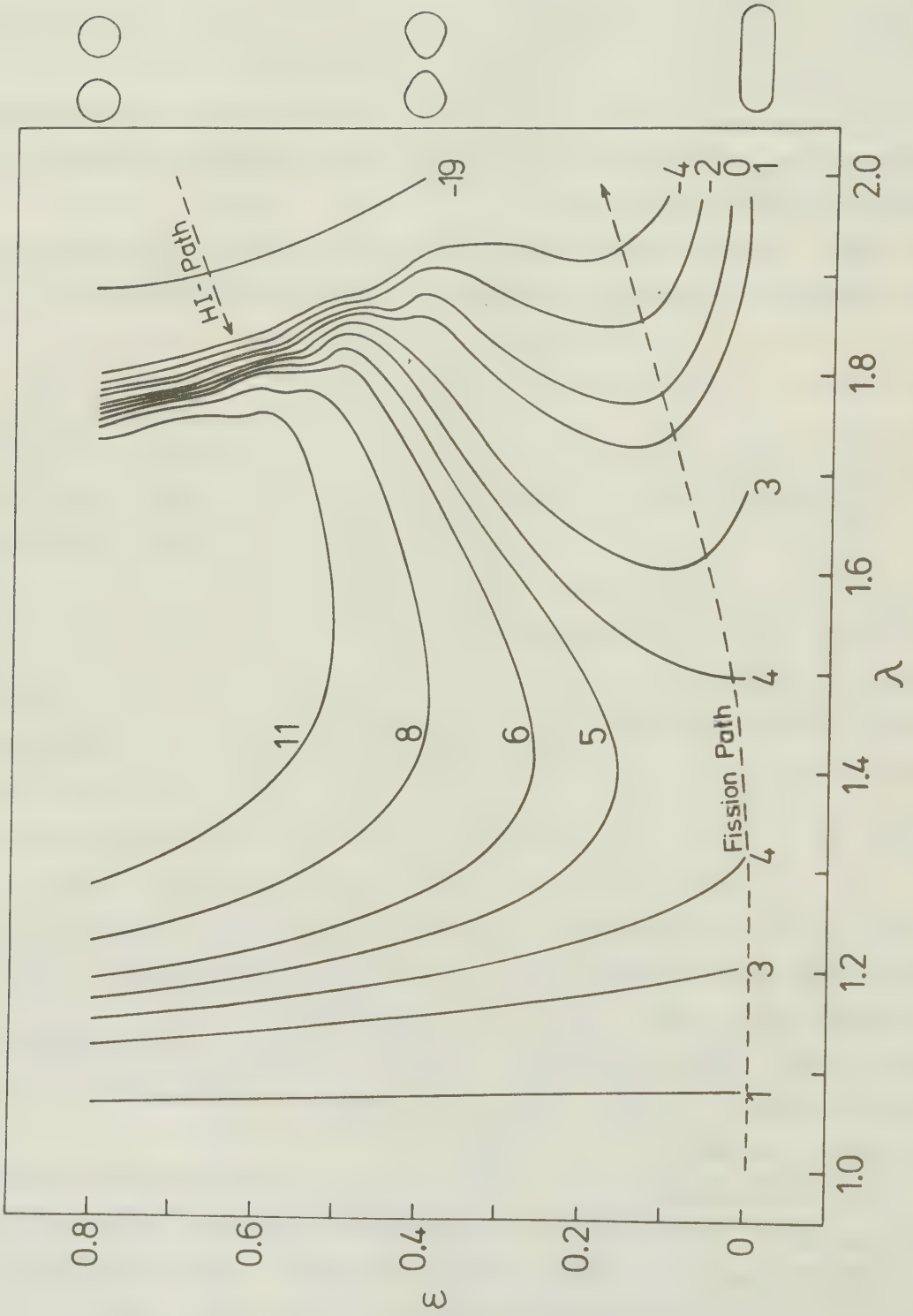

Fig. 7. Potentialenergiefläche für ^{236}U im Tropfenmodell in Abhängigkeit von λ und ε, für $\beta_1=\beta_2=1$, $\xi=0$. Zur Veranschaulichung sind an den Achsen einige Kernformen eingezeichnet.

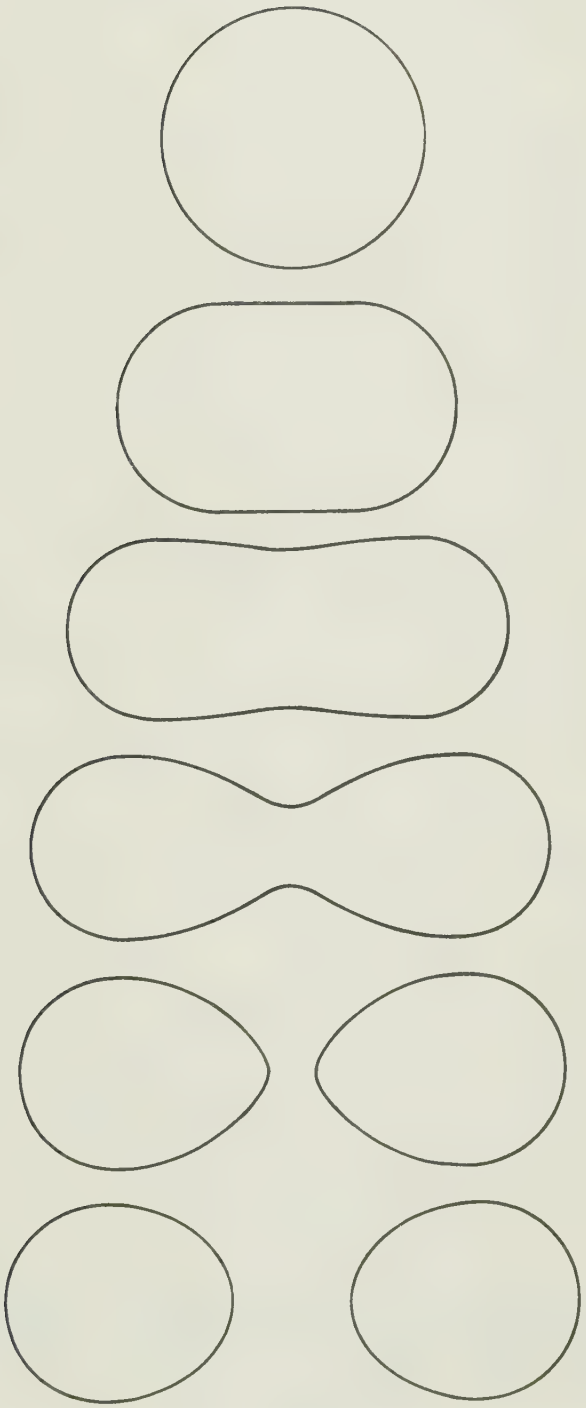

Fig. 8. Folge von Kernformen entlang dem in Fig. 7 gestrichelt eingezeichneten Spaltweg.

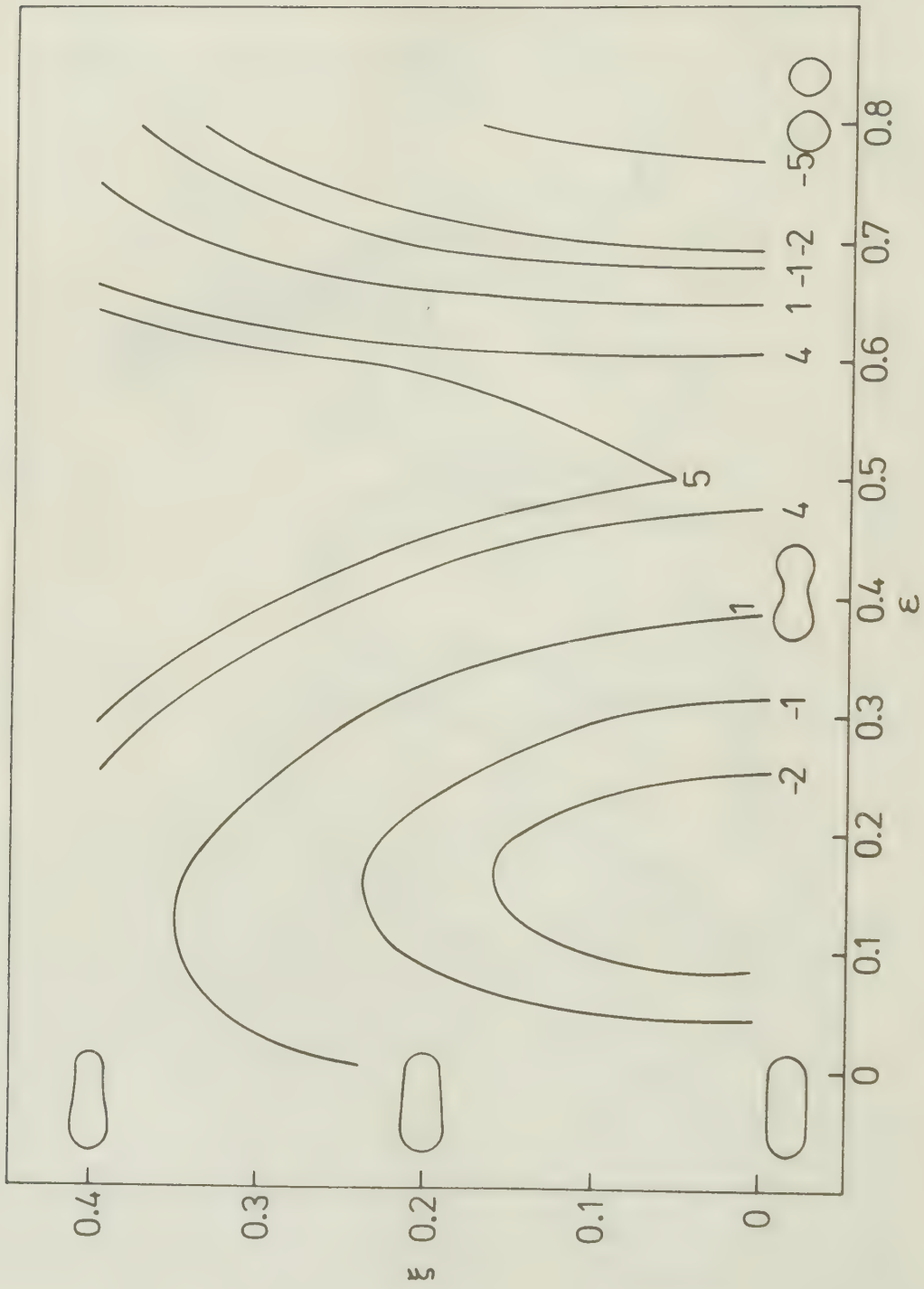

Fig. 9. Potentialenergiefläche für ^{236}U im Tropfenmodell in Abhängigkeit von ε und ξ, für $\lambda=1.8$, $\beta_1=\beta_2=1$.

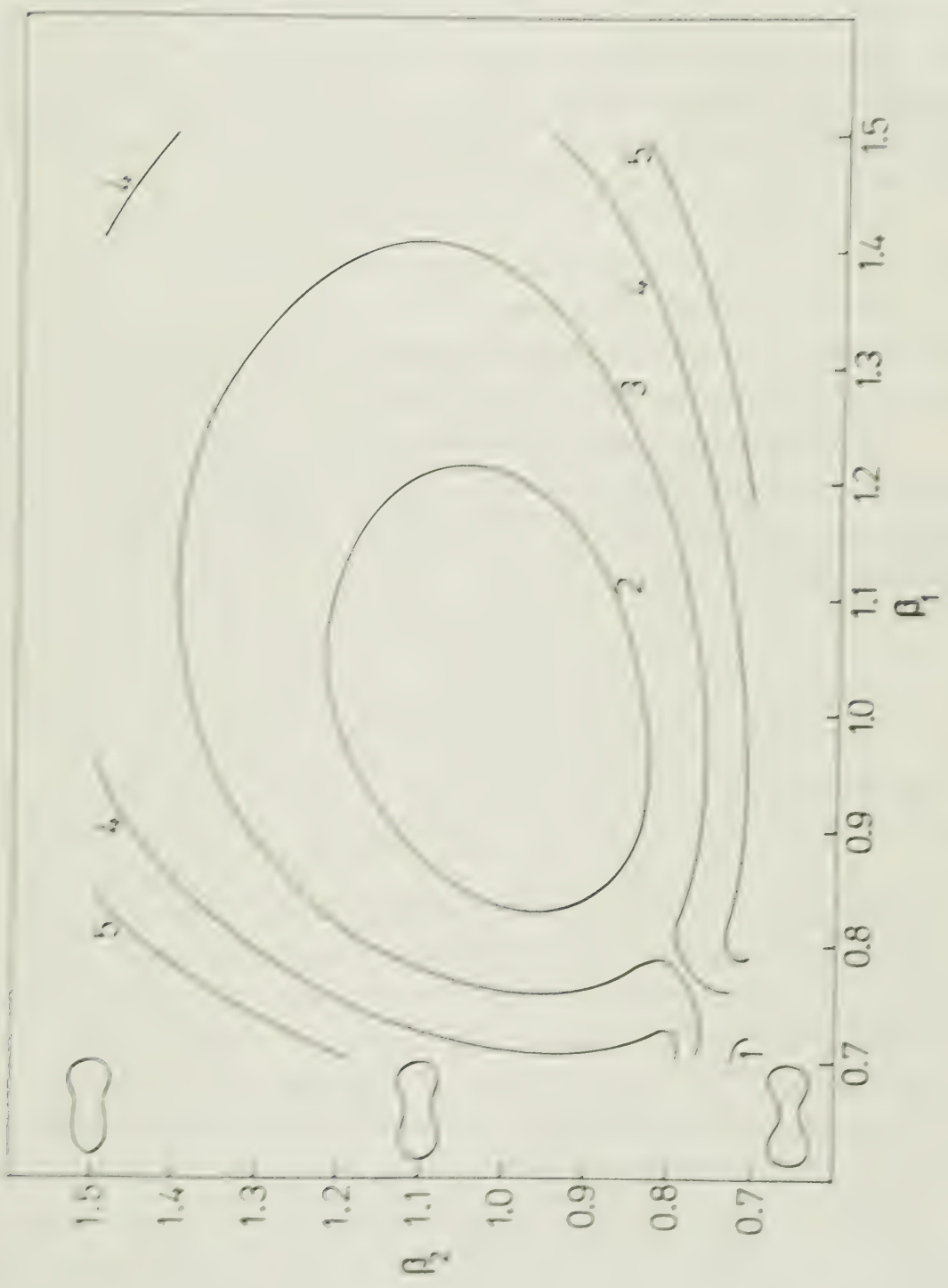

Fig. 11. Potentialenergiefläche für ^{236}U im Tropfenmodell in Abhängigkeit von β_1 und β_2, für $\lambda=1.8$, $\varepsilon=0.15$, $\xi=0$.

wünschte Effekt störte bei den bisherigen Rechnungen nicht, da das Minimum der Energie bei Berücksichtigung der Schalenkorrekturen meist bei prolaten Deformationen lag und die Barriere zu diesem unrealistischen Teil der Fläche erhöht wurde. Dennoch macht dieser Effekt klar, daß auch λ keine völlig befriedigende Darstellung eines 'Spaltparameters' ist, weil man nach dem gesagten bei festem λ nicht in jedem Fall ein sinnvolles Minimum in den anderen Variablen finden kann.

Die ursprünglich im Zweizentrenmodell verwendete Koordinate Δz, der Zentrenabstand, kann aus demselben Grund nicht bei der Minimisierungsmethode benutzt werden. Nur erhält man bei festem Δz eine Instabilität gegen prolate Deformationen, die eine Minimisierung der Energie praktisch unmöglich macht.

Nachteile wie diese kann man mit letzter Konsequenz erst dann vermeiden, wenn in allen Variablen dynamisch gerechnet wird und damit auf die Auswahl eines 'Spaltparameters' verzichtet werden kann.

7. Das Cranking-Modell

Bisher wurde angenommen, daß das Schalenmodellpotential, in dem sich die Nukleonen gemeinsam bewegen, zeitlich unveränderlich ist. Eine kollektive Bewegung wie die Spaltung ist aber mit einer zeitlichen Änderung des Potentials verbunden, die man durch eine Zeitabhängigkeit der Parameter x_i des Einteilchenpotentials beschreiben kann:

$$x_i = x_i(t) , \quad i = 1,n \quad . \qquad (1)$$

Die x_i werden dann als kollektive Koordinaten interpretiert und man versucht, klassische Bewegungsgleichungen zu erhalten, die dann u. U. quantisiert werden können.

Da die Kollektivbewegung aus den Bewegungen der A einzelnen Nukleonen entsteht, sind die x_i Funktionen der 3A Einteilchenkoordinaten r_j, j=1,3A. Man kann nun im Prinzip n von diesen Einteilchenkoordinaten durch die n x_i ausdrücken und in den Bewegungsgleichungen für die r_j eliminieren. Das Ergebnis wären Bewegungsgleichungen für den Satz von Koordinaten $(x_1,\ldots x_n,r_{n+1},\ldots r_{3A})$. Diese neuen Bewegungsgleichungen beschreiben dann die Dynamik der Kollektivkoordinaten, der übriggebliebenen inneren Koordianten und die Kopplung zwischen ihnen.

Bei einfachen Kollektivbewegungen wie Schwerpunktsbewegung, Rotationen und kleinen Quadrupolschwingungen sind in dieser Richtung schon Erfolge erzielt worden (eine Übersicht findet man in [76]), i. allg. ist es aber schon sehr schwierig, die kollektiven Koordinaten durch die Einteilchenkoordinaten auszudrücken, geschweige denn die Substitution in den Bewegungsgleichungen wirklich auszuführen. Letzterer Schritt kann zwar vereinfacht werden, indem alle Einteilchenkoordinaten beibehalten werden, aber dann sind zu viele Koordinaten in der Beschreibung des Systems enthalten und man bekommt spuriose Bewegungen [77].

Aus diesen Gründen werden Kollektivbewegungen von Vielteilchensystemen heute noch meist mit Näherungsmethoden behandelt, von denen die wichtigste das Cranking-Modell von Inglis

[33-36] ist.

Im Cranking-Modell werden die Kollektivkoordinaten nicht aus den Bewegungen der einzelnen Teilchen abgeleitet, sondern zunächst als dem System von außen aufgezwungene Parameter betrachtet. Dann wird die Energieänderung berechnet, die das System erfährt, wenn es einer Änderung dieser Parameter folgt, und man interpretiert sie als die Energie der kollektiven Bewegung. Die hier gegebene Ableitung des Cranking-Modells folgt im wesentlichen Wilets[78].

Bezeichnet man die Gesamtheit der Koordinaten x_i und r_j mit x bzw. r, so schreibt sich die Vielteilchen-Schrödingergleichung der inneren Bewegung für einen festen Satz von Parametern x in der Form

$$H(r,x)\ \psi_\nu(r,x) = E_\nu(x)\ \psi_\nu(r,x)\ . \qquad (2)$$

Sie ist für jedes x lösbar und liefert die Funktionen ψ_ν. Wenn nun die Parameter x zeitabhängig sind, dann ist auch der Hamiltonoperator zeitabhängig und die ψ_ν sind nicht mehr die richtigen Lösungen des zeitabhängigen Problems.

Ist aber die Änderung von x mit der Zeit langsam gegen die Einteilchenbewegungen, dann kann man annehmen, daß zu jeder festen Zeit die Wellenfunktion der inneren Bewegung näherungsweise Gl. 2 folgt, da die Teilchen Zeit haben, sich auf das momentane Potential einzustellen. In diesem Fall sollte man mit dem Ansatz

$$\Phi(r,t) = \sum_\nu c_\nu(t)\psi_\nu(r,x(t))\cdot\exp\{-\frac{i}{\hbar}\int^t E_\nu(x(t'))dt'\} \qquad (3)$$

und den Methoden der Störungstheorie eine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\ \Phi(r,t) = H(r,x(t))\ \Phi(r,t) \qquad (4)$$

finden können. Setzt man Gl. 3 in Gl. 4 ein und bildet die Matrixelemente mit ψ_μ, so erhält man nach kurzen Umformungen

$$\dot{c}_\mu(t) = -\sum_j \dot{x}_j \sum_\nu \langle\mu|\partial/\partial x_j|\nu\rangle \exp\{-\frac{i}{\hbar}\int^t (E_\nu - E_\mu)dt'\} \quad (5)$$

Unter der Annahme, daß eines der c_μ, etwa c_0, ≈1 ist und alle anderen klein bleiben (das ist die übliche Annahme der zeitabhängigen Störungsrechnung und sollte im Rahmen der oben erwähnten adiabatischen Näherung gelten) sowie daß die Energien im Exponenten langsam variieren, kann man Gl. 5 integrieren und erhält für $\mu \neq 0$

$$\dot{c}_\mu(t) = i\hbar \sum_j \dot{x}_j \frac{\langle\mu|\partial/\partial x_j|0\rangle}{E_\mu - E_0} \exp\{-\frac{i}{\hbar}\int^t (E_\mu - E_0)dt'\} \quad (6)$$

c_0 folgt aus der Normierungsbedingung

$$c_0^2 = 1 - \sum_\nu |c_\nu|^2 \quad . \quad (7)$$

Damit ist die zeitabhängige Wellenfunktion in erster Ordnung Störungsrechnung bestimmt. Die Energie des Systems zu jedem Zeitpunkt berechnet man als Erwartungswert des Hamiltonoperators in dieser Wellenfunktion:

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_\nu |c_\nu|^2 E_\nu \\ &= E_0(x(t)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} B_{x_i x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j \quad . \end{aligned} \quad (8)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. 8 hat die Form einer kinetischen Energie in den Kollektivkoordinaten x. Die Koeffizienten B sind die kollektiven Massenparameter, die man wie folgt ausdrücken kann:

$$B_{x_i x_j}(x) = 2\hbar^2 \sum_{\nu \neq 0} \frac{\langle 0|\partial/\partial x_i|\nu\rangle\langle\nu|\partial/\partial x_j|0\rangle}{E_\nu - E_0} \quad . \quad (9)$$

Gl. 9 ist unter dem Namen 'Cranking-Formel' bekannt.

Man ist nun versucht, Gl. 8 als Definition der (zunächst noch klassischen) kollektiven Energie aufzufassen und daraus Bewegungsgleichungen abzuleiten. Es ist aber nicht selbstverständlich, daß die kinetische Energie des Systems bei einer von außen aufgezwungenen Bewegung dieselbe ist wie bei einer spontanen, aus den inneren Bewegungen resultierenden echten

Kollektivbewegung. Anschaulich sollte man aber erwarten, daß dies in den meisten Fällen annähernd gelten sollte und man wird in dieser Annahme dadurch bestärkt, daß Gl. 9, auf Rotationen angewandt, in gewissen Fällen das Trägheitsmoment des starren Körpers liefert und damit zumindestens in einigen Fällen exakt richtig ist. Die Energie nach Gl. 8 ist keine Erhaltungsgröße, da der Hamiltonoperator zeitabhängig ist. Das drückt nur die Tatsache aus, daß man von außen Energie in das System stecken kann, indem man die x verändert. Bei einer echten Kollektivkoordinate dagegen sollte die Energie zeitlich konstant bleiben und mit dieser zusätzlichen Annahme kann aus Gl. 8 die Dynamik entwickelt werden. Es ist klar, daß das tatsächlich eine zusätzliche Annahme ist, die nicht im Cranking-Modell enthalten ist, denn sonst könnte man ja Aussagen über die im Cranking-Modell völlig willkürlich veränderlichen Parameter x gewinnen.

Im Vergleich zur exakten Theorie hat das Cranking-Modell noch einen zusätzlichen Nachteil: man bekommt keinerlei Information über die Kopplung zwischen Einteilchen- und Kollektivkoordinaten, so daß die Konsequenzen einer Vernachlässigung dieser Kopplung schwer nachprüfbar bleiben.

Dafür ist der große Vorteil des Modells, daß man außer der Abhängigkeit des Hamiltonoperators von den x keinerlei zusätzliche Informationen über diese Kollektivparameter haben muß; in der Tat kann man jetzt im Rahmen dieses Modells nahezu beliebige kollektive Parameter behandeln, wenn nur die intrinsischen Wellenfunktionen in irgendeiner sinnvollen Weise von ihnen abhängen.

Üblicherweise wird Gl. 9 unter Benutzung der Relation

$$\langle\mu|\partial/\partial x_i|0\rangle = \frac{1}{E_\mu - E_0}\langle\mu|\,[H, \frac{\partial}{\partial x_i}]\,|0\rangle$$

$$= -\frac{\langle\mu|\partial H/\partial x_i|0\rangle}{E_\mu - E_0} \qquad (10)$$

umgeformt in die leichter zu berechnende Form

$$B_{x_i x_j} = 2\hbar^2 \sum_{\mu>0} \frac{\langle 0|\partial H/\partial x_i|\mu\rangle\langle\mu|\partial H/\partial x_j|0\rangle}{(E_\mu - E_0)^3} \quad . \tag{11}$$

Werden nach diesen Gleichungen und für ein einfaches Schalenmodell ohne Restwechselwirkungen die Massenparameter des Rotations-Vibrationsmodells berechnet, dann erhält man für das Trägheitsmoment den Wert des starren Körpers, der im Vergleich zu den experimentellen Daten viel zu hoch liegt, und für den Trägheitsparameter der β-Schwingungen zu kleine Werte.

Erst Belyaev brachte die Theorie in gute Übereinstimmung mit dem Experiment, indem er in das Cranking-Modell den BCS-Ansatz für die Kernwellenfunktion mit Paarkraft einführte [36]. In diesem Fall ist der Grundzustand des Kerns in der Schreibweise der zweiten Quantisierung

$$|BCS> = \prod_\nu (u_\nu + v_\nu\, a^+_\nu\, a_{\tilde\nu})\, |0_{vac}> \tag{12}$$

mit $|0_{vac}>$ dem Vakuumszustand und $\tilde\nu$ der Bezeichnung für den zu ν zeitumgekehrten Zustand. Die Koeffizienten u und v sind die üblichen BCS-Besetzungszahlen.

Der Operator $\partial/\partial x$ aus dem Cranking-Modell wirkt jetzt sowohl auf die Zustände der Einzelteilchen wie auch auf die Besetzungszahlen u und v, so daß man ihn aufspalten kann zu

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\tilde\partial}{\partial x_i} + \sum_{\mu,\nu} \langle\mu|\partial/\partial x_i|\nu\rangle (a^+_\mu a_\nu + a^+_{\tilde\mu} a_{\tilde\nu}) \quad , \tag{13}$$

wobei der erste Teil per Definitionem nur auf die Besetzungszahlen u und v wirkt.

Den zweiten Anteil von Gl. 13 kann man auf Quasiteilchenoperatoren α,β [72] transformieren, die definiert sind als

$$a_\nu = u_\nu \alpha_\nu + v_\nu \beta^+_\nu \tag{14}$$

$$a_{\tilde\nu} = u_\nu \beta_\nu - v_\nu \alpha^+_\nu \tag{15}$$

und für die der BCS-Grundzustand das Vakuum bildet:

$$\alpha_\nu|BCS> = \beta_\nu|BCS> = 0 \quad . \tag{16}$$

Das Ergebnis der Transformation in diesem Operator ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i} = \sum_\mu 2\langle\mu|\partial\ \partial x_i|\mu\rangle v_\mu^2 \qquad (17)$$

$$+ \sum_{\mu,\nu}\langle\mu|\partial/\partial x_i|\nu\rangle(\alpha_\mu^+\alpha_\nu+\beta_\nu^+\beta_\mu)(u_\nu u_\mu - v_\nu v_\mu)$$

$$+ \sum_{\mu,\nu}\langle\mu|\partial/\partial x_i|\nu\rangle(\alpha_\mu^+\beta_\nu^+ + \beta_\mu\alpha_\nu)(u_\nu v_\mu + v_\mu u_\nu)\ .$$

Wird dieser Operator auf den BCS-Grundzustand angewendet, so fallen gemäß Gl. 16 alle Terme weg, bei denen rechts ein Vernichtungsoperator steht, und es bleibt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i}\ |BCS\rangle = 2\sum_\nu \langle\nu|\partial/\partial x_i|\nu\rangle v_\nu^2|BCS\rangle \qquad (18)$$

$$+ \sum_{\mu,\nu}\langle\mu|\partial/\partial x_i|\nu\rangle(u_\mu v_\nu + v_\mu u_\nu)\alpha_\mu^+\beta_\nu^+|BCS\rangle\ .$$

Der zweite Term aus Gl. 13 wird nach Definition nur auf die u_ν und v_ν angewandt. Für den Zustand $|BCS\rangle$ ergibt das

$$\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i}\ |BCS\rangle = \sum_\nu \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x_i} + \frac{\partial v_\nu}{\partial x_i} a_\nu^+ a_{\tilde{\nu}}^+\right) \prod_{\mu,\nu}(u_\mu + v_\mu a_\mu^+ a_{\tilde{\mu}}^+)\ |0\rangle\ , \qquad (19)$$

und das kann unter Verwendung von Gl. 14 und 15 umgeformt werden zu

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = -\sum_\nu \frac{1}{v_\nu}\frac{\partial u_\nu}{\partial x_i}\ \alpha_\nu^+\beta_\nu^+\ |BCS\rangle\ . \qquad (20)$$

Aus Gl. 18 und 20 erkennt man, daß der Operator $\partial/\partial x_i$ nur Zwei-Quasiteilchen-Anregungen bewirkt, die Summe in Gl. 9 ist also nur über Zustände der Form

$$|\nu\mu\rangle = \alpha_\nu^+\ \beta_\mu^+\ |BCS\rangle \qquad (21)$$

zu erstrecken. Mit den Gl. 18 und 20 wird das Matrixelement aus der Cranking-Formel zu

$$\langle\nu\mu|\partial/\partial x_i|BCS\rangle = \langle\nu|\partial/\partial x_i|\mu\rangle(u_\nu v_\mu + v_\nu u_\mu) - \frac{\delta_{\nu\mu}}{v_\nu}\frac{\partial u_\nu}{\partial x_i}\ . \qquad (22)$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Cranking-Formel ein und summiert über alle nach Gl. 21 aufgebauten Zustände, dann resultiert das Endergebnis

$$B_{x_i x_j} = 2\hbar^2 \sum_{\nu\mu} \frac{\langle\nu|\partial/\partial x_i|\mu\rangle\langle\mu|\partial/\partial x_j|\nu\rangle}{\tilde{\varepsilon}_\mu + \tilde{\varepsilon}_\nu} (u_\nu v_\mu + v_\nu u_\mu)^2 + \hbar^2 \sum_\nu \frac{1}{v_\nu^2} (\partial u_\nu/\partial x_i)^2 \frac{1}{\tilde{\varepsilon}_\nu} \quad . \tag{23}$$

Dabei wurde noch angenommen, daß die Diagonalelemente von $\langle\nu|\partial/\partial x_i|\mu\rangle$ verschwinden. Das ist z. B. immer dann richtig, wenn die Wellenfunktionen reell geschrieben werden können, da dann aus der Normierung für jedes x_i folgt, daß

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\langle\nu|\nu\rangle = 2\langle\nu|\partial/\partial x_i|\nu\rangle = 0 \tag{24}$$

gelten muß. $\tilde{\varepsilon}_\nu$ ist die Quasiteilchenenergie nach

$$\tilde{\varepsilon}_\nu = \sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad . \tag{25}$$

Gl. 23 ist das endgültige Resultat für den Massenparameter im Cranking-Modell bei Paarkraftkorrelationen. Der erste Anteil auf der rechten Seite von Gl. 23 rührt von den Änderungen der Einteilchenwellenfunktionen bei der Deformation her und ist gegenüber dem einfachen Cranking-Modell nach Gl.9 nur modifiziert. Der zweite Anteil dagegen ist grundsätzlich neu und gibt die Änderung der BCS-Besetzungswahrscheinlichkeiten wieder. Während bei Rotationen der zweite Anteil verschwindet, da sich dann die Korrelationen nicht mit dem Kollektivparameter verändern, ist er bei Vibrationen und ähnlichen Bewegungen mit starker Änderung der BCS-Lösung bei weitem der dominierende Anteil. In dieser Arbeit sind alle behandelten Koordinaten vom letzteren Typ mit starker Änderung der Niveaustruktur um die Fermikante bei Deformation, so daß als gute Näherung nur der zweite Anteil von Gl. 23 in den Rechnungen benutzt wird.

Zum Abschluß sei noch eine Alternativform für Gl. 23 angegeben, die man durch eine Umformung analog Gl. 10 erhalten

kann:

$$B_{x_i x_j} = 2\hbar^2 \sum_{\mu\nu} \frac{\langle\mu|\partial H/\partial x_i|\nu\rangle\langle\nu|\partial H/\partial x_j|\mu\rangle}{(\tilde{\varepsilon}_\mu + \tilde{\varepsilon}_\nu)^3} \cdot (u_\mu v_\nu + u_\nu v_\mu)^2 + P_{ij} \quad . \tag{26}$$

Dabei ist P_{ij} ein kleiner Korrekturterm, der die Änderungen der Fermikante λ und des Gap Δ mit der Deformation berücksichtigt.

8. Massenparameter im Zweizentrenmodell

Entsprechend den fünf kollektiven Freiheitsgraden des Zweizentrenmodells, λ, ε, ξ, β_1 und β_2, gibt es in diesem Modell fünfundzwanzig Massenparameter, die zusammen einen 5×5-Tensor bilden. Da der Tensor aber nach Gl. 7.9 offenbar symmetrisch ist, verbleiben fünfzehn unabhängige Komponenten. Angesichts dieser immer noch großen Zahl sind für einige wenige und besonders interessante der Komponenten Rechnungen durchgeführt worden, die Aussagen über ihr allgemeines Verhalten erlauben.

Lichtner u. a. [79] berechneten Massenparameter im Rahmen des Zweizentrenoszillators nach Scharnweber [11] mit symmetrischen Kernformen, bei denen insbesondere die beiden Fragmente die gleiche Deformation $\beta_1=\beta_2=\beta$ haben. Außer β wurde als freier Parameter der Zentrenabstand mit der Benennung $\Delta z = 2 \cdot R$ zugelassen. Fig. 11 zeigt die drei Massenparameter B_{RR}, $B_{R\beta}$ und $B_{\beta\beta}$ als Funktionen von R für zwei Werte von β.

Alle drei Massenparameter zeigen starke Oszillationen und nähern sich nur asymptotisch, wenn die Schalenstruktur der Fragmente sich nicht mehr ändert, konstanten Werten. Die dort angenäherten Grenzwerte lassen sich aus einfachen physikalischen Überlegungen ableiten: B_{RR} sollte das Vierfache der reduzierten Masse werden (da R asymptotisch die Hälfte des Schwerpunktabstandes der Fragmente wird), $B_{R\beta}$ sollte wegen der dann verschwindenden Kopplung von R und β gegen Null gehen, und $B_{\beta\beta}$ muß gleich dem Doppelten des Massenparameters für β Schwingungen in den Fragmenten werden, da wegen $\beta_1=\beta_2$ beide gleichermaßen schwingen müssen. Alle drei asymptotischen Werte werden im Modell korrekt reproduziert.

Im entgegengesetzten Grenzfall verschwindender Separation, d. h. für R=0, wenn das Modell ein reines Nilsson-Modell wird, ist $B_{\beta\beta}$ der Massenparameter für β-Schwingungen. Die Kopplungsmasse $B_{R\beta}$ bleibt relativ groß, da R dann in erster Ordnung eine Quadrupoldeformation (mit Beimischung aller höheren geraden Multipole) beschreibt, und somit nahezu den gleichen Freiheitsgrad angibt wie β.

Die Oszillationen in den Massenparametern sind eng mit den

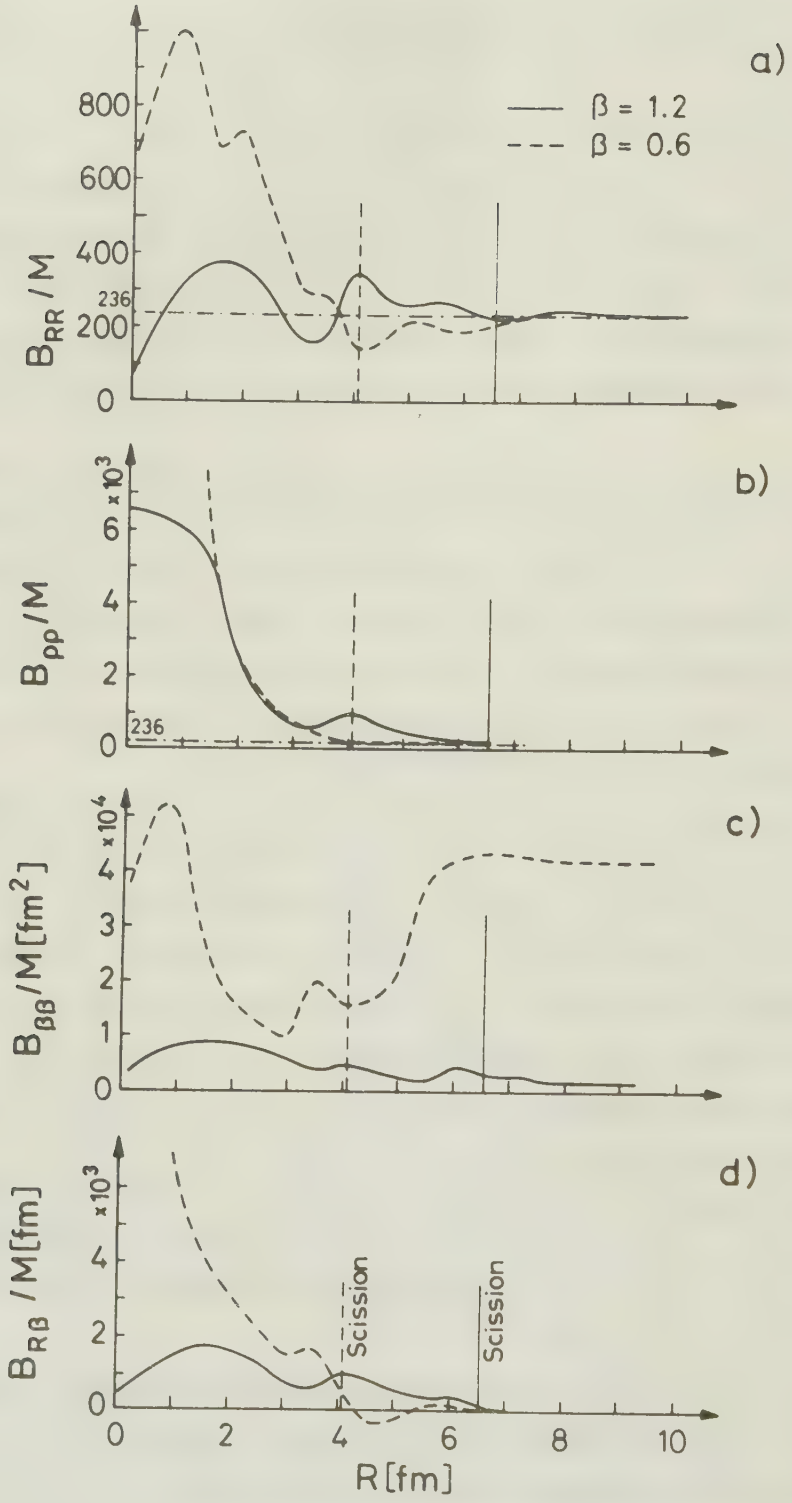

Fig. 11. Massenparameter im symmetrischen Zweizentrenmodell als Funktionen des Zentrenabstandes $\Delta z = 2 \cdot R$.

Oszillationen in Schalenstruktur und Paarkraft verknüpft [20]. Qualitativ läßt sich das erkennen, wenn man in dem Ausdruck 7.26 für die Massenparameter die Summanden im Bereich ($\lambda-\Delta$, $\lambda+\Delta$), der allein wesentlich zur Summe beiträgt, durch Mittelwerte ersetzt. Das ist für die Matrixelemente möglich und die Besetzungszahlen können über diesen Bereich verschmiert werden. Dann hängt nur noch die Anzahl der Zustände in diesem Intervall und der Nenner von der Niveaustruktur ab. Erstere ist

$$n \propto g(\lambda)\cdot\Delta \quad , \tag{1}$$

und der Nenner kann ersetzt werden durch

$$(\tilde{\varepsilon}_\mu+\tilde{\varepsilon}_\nu)^{-3} \propto \Delta^{-3} \quad , \tag{2}$$

so daß näherungsweise

$$B_{x_i x_j} \propto g(\lambda)\cdot\Delta^{-2} \tag{3}$$

gilt.

In dieser Gleichung ist der entgegengesetzte Einfluß der Niveaudichte und des Gap auf die Massenparameter gut zu erkennen. Damit wird auch verständlich, warum die Massenparameter ebensolche Oszillationen zeigen wie die Schalenkorrekturen und die Paarkraftkorrektur.

Die Werte der Massenparameter hängen sehr stark von der genauen Definition der Kollektivkoordinaten ab. Ersetzt man z. B. den Zentrenabstand $2\cdot R$ durch den Abstand der Schwerpunkte der Fragmente,

$$2\cdot\rho = \int_{z>0} z\, d\tau - \int_{z<0} z\, d\tau \quad , \tag{4}$$

wobei die Integrationen über das Kernvolumen im jeweiligen z-Bereich zu erstrecken sind, dann hängen die Massenparameter wegen

$$B_{\rho\rho}\cdot\dot{\rho}^2 = B_{RR}\cdot\dot{R}^2 \tag{5}$$

über die Beziehung

$$B_{\rho\rho} = B_{RR} \cdot (dR/d\rho)^2 \qquad (6)$$

zusammen. Der Effekt des Faktors ist in der zweiten Zeichnung von Fig. 11 zu erkennen, wenn man die dort aufgetragene Masse $B_{\rho\rho}$ mit B_{RR} vergleicht. Offensichtlich hat es keinen Sinn, Massenparameter zu vergleichen, die nur 'ähnlichen', aber nicht exakt den gleichen Kollektivkoordinaten zugeordnet sind.

Die Massenparameter für die beiden Koordinaten λ und ξ, die in dieser Arbeit besonders betrachtet werden, zeigen ein ähnliches Verhalten wie die eben diskutierten. Numerische Ergebnisse werden in Abschnitt 10 präsentiert und deshalb sollen an dieser Stelle nur einige besondere Eigenschaften bei diesen beiden Koordinaten behandelt werden.

$B_{\lambda\lambda}$ entspricht physikalisch etwa B_{RR}. Analog Gl. 6 hat man aber

$$B_{\lambda\lambda} = B_{RR} \cdot (dR/d\lambda)^2 \ , \qquad (7)$$

und da asymptotisch

$$2 \cdot R \ \rightarrow \ 2 \cdot R_0 \cdot \lambda + \text{const.} \qquad (8)$$

gilt, wird der asymptotische Wert von $B_{\lambda\lambda}$ zu

$$B_{\lambda\lambda} \ \rightarrow \ B_{RR} \cdot R_0^2 \ , \qquad (9)$$

worin noch B_{RR} asymptotisch gleich dem Vierfachen der reduzierten Masse wird.

Wesentlich interessanter noch ist das physikalisch zu erwartende Verhalten von $B_{\xi\xi}$ und die Bedeutung der Koordinate ξ überhaupt im Grenzfall $\lambda \rightarrow \infty$.

Eine Änderung von ξ entspricht dem Fluß von Materie aus dem einen Fragment in das andere, etwa so wie in Fig. 12 angedeutet. Dabei ist besonders im Grenzfall zu beachten, daß ξ nicht aus den tatsächlichen Massenzahlen der Fragmente, sondern

rein geometrisch aus den Halbachsen der aus ihnen ergänzten Ellipsoide bestimmt wird. Solange die Fragmente durch einen breiten Hals verbunden sind und die Wellenfunktionen sich noch über das gesamte System erstrecken, folgt die Massenverteilung, die man korrekt aus den Wellenfunktionen bestimmt, sofort jeder kleinen Änderung des Potentials. In diesem Fall gibt ξ wirklich mit guter Genauigkeit die Massenasymmetrie an.

Ganz anders wird die Lage dagegen für den Fall getrennter Fragmente. Der Massenfluß zwischen ihnen ist dann unterbunden und in jedem Fragment kann nur eine ganze Zahl von Nukleonen lokalisiert sein. Im Zweizentrenmodell drückt sich das mathematisch darin aus, daß die Wellenfunktionen jeweils nur in einem der Fragmente nicht verschwinden. Die Massenzahlen der Fragmente hängen nun stark davon ab, nach welcher Vorschrift die Einteilchenzustände besetzt werden. Im folgenden wird davon ausgegangen, daß wie im Schalenmodell üblich die untersten Niveaus des Gesamtsystems besetzt werden.

Da ξ geometrisch definiert ist, kann man über ξ nur die Halbachsen der Fragmente verändern und alles übrige hängt von

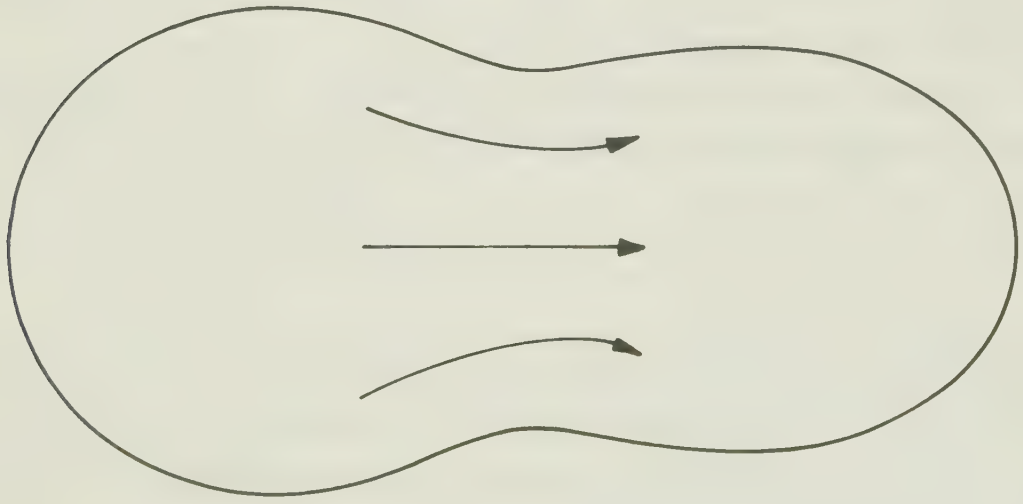

Fig. 12. Physikalische Veranschaulichung der Änderungen von ξ als Austausch von Materie zwischen den Fragmenten.

der davon verursachten Änderung der Wellenfunktionen ab. Sind die Fragmente getrennt, dann werden die Wellenfunktionen bei einer Änderung der Größen der Fragmente nur noch in ihrer Ausdehnung um das Zentrum dieses Fragmentes geändert, nicht dagegen in ihrer Aufteilung auf die Fragmente. Man bekommt also nur Kompressionseffekte, da bei gleichbleibender Massenzahl die Ausdehnung der Fragmente sich ändert.

Das gilt jedoch nur solange, wie die Anordnung der Einteilchenniveaus an der Fermikante sich nicht so verschiebt, daß zwei Niveaus sich kreuzen, von denen eines unbesetzt ist und die in verschiedenen Fragmenten lokalisiert sind. Auf Grund der oben erwähnten Besetzungsvorschrift springen dann Nukleonen vom einen auf das andere Niveau und wechseln so in ein anderes Fragment über. Das entspricht einem Massenaustausch durch Tunneln von Nukleonen.

Aus diesen Überlegungen folgen zwei Konsequenzen:

a) Bei großem Abstand der Zentren und besonders für getrennte Fragmente ist ein Austausch von Nukleonen mit Tunneln durch die Potentialbarriere zwischen den Fragmenten verbunden. Da dies ein extrem langsamer Prozeß ist, gilt mit Sicherheit die adiabatische Annahme nicht mehr, so daß man das Cranking-Modell nicht mehr unverändert zur Berechnung der Massenparameter heranziehen darf.

b) Der direkte Zusammenhang zwischen der geometrischen Größe ξ und der echten Massenasymmetrie, die man etwa als

$$\eta = \frac{1}{A} \left(\int_{z>0} |\psi^2| d\tau - \int_{z<0} |\psi^2| d\tau \right) \qquad (10)$$

definieren könnte, geht im selben Grenzfall verloren. Nur solange die Fragmente noch durch einen breiten Hals verbunden sind, ist $\xi = \eta$, während nach der Trennung ξ eine stetige Variable bleibt, die Kompressionen beschreibt, und η nur noch ganzzahlige Werte annimmt.

Ändert man ξ, so ändert sich, wie oben besprochen, auch η, und zwar unstetig bei Niveaukreuzungen an der Fermikante. Rechnet man also von $B_{\xi\xi}$ auf $B_{\eta\eta}$ um, so geben die Singularitäten von $(d\eta/d\xi)$ auch Singularitäten in $B_{\eta\eta}$, die zur Folge

haben, daß asymptotisch nur die diskreten Werte von η, die ganzen Fragmentmassenzahlen entsprechen, realisiert werden können. Damit tritt der interessante Fall ein, daß aus einer kontinuierlichen Kollektivkoordinate über die Massenparameter ein diskreter Index wird, der etwa dem üblichen Kanalindex entspricht.

Bei den Rechnungen, die in dieser Arbeit zur Kernspaltung gemacht wurden, treten alle diese Probleme nicht auf, da nur solche Fälle behandelt werden, in denen die Fragmente noch über einen breiten Hals zusammenhängen. Der asymptotische Fall getrennter Fragmente wird aber offensichtlich von größter Bedeutung, wenn man Schwerionenkollisionen in diesem Formalismus behandeln will. In diesem Fall muß das Verhalten von $B_{\xi\xi}$ und $B_{\eta\eta}$ noch eingehender studiert werden. Eine ausführliche Diskussion findet man in [80].

Ein letztes Problem bei der Berechnung von Massenparametern im asymmetrischen Zweizentrenmodell sei noch kurz erwähnt. Bei einer Änderung der Parameter bleibt nämlich der Schwerpunkt des Kerns nicht an einer festen Stelle in Ruhe, sondern bewegt sich etwas. Deshalb enthalten die Massenparameter kleine Beiträge an Schwerpunktsbewegung, die eliminiert werden müssen. Dieses Problem ist aber ohne Bedeutung, wenn, wie in Kapitel 7 diskutiert, nur der zweite Anteil von Gl. 7.23 zur Berechnung der Massenparameter verwendet wird. Es hängen nämlich zwar die Matrixelemente $\langle\mu|\partial/\partial x_i|\nu\rangle$, nicht aber die Quasiteilchenenergien und Besetzungswahrscheinlichkeiten von einer Verschiebung des Koordinatensystems ab.

9. Dynamische Behandlung der Massenasymmetrie

In den üblichen Formulierungen der Reaktionstheorie wäre bei der Kernspaltung jede Endkonfiguration mit verschiedenen Fragmentmassen als eigener Kanal zu behandeln. Die Koordinate ξ (bzw. exakter η) erlaubt es nun, dieses Vielkanalproblem zu ersetzen durch die Dynamik einer einzelnen kontinuierlich variierenden Kollektivkoordinate. Kennt man die Dynamik dieser Koordinate, dann kann man die Entwicklung der Massenasymmetrie während der Spaltung verfolgen. Grenzen findet diese Art der Formulierung des Problems zum einen an der Frage, wie weit die Spaltung überhaupt kollektiv dargestellt werden kann, d. h. insbesondere wie stark die Kopplung an die inneren Freiheitsgrade ist, die man als Reibung auffassen kann, und zum anderen daran, daß spätestens am Spaltpunkt die Koordinate diskret werden muß. Zu beiden Problemen können Aussagen aus der Güte der Ergebnisse gewonnen werden, die die rein kollektive Theorie vor dem Spaltpunkt liefert.

Mit den fünf Koordinaten $\{x\} = \{\lambda, \varepsilon, \xi, \beta_1, \beta_2\}$ wird die klassische Gesamtenergie der kollektiven Bewegung im Zweizentrenmodell zu

$$H(x) = \sum_{i,j} B_{x_i x_j}(x)\, \dot{x}_i \dot{x}_j + V(x) \,. \qquad (1)$$

Nach dem Quantisierungsverfahren von Pauli und Podolsky [81,82] kann aus Gl. 1 eine Schrödingergleichung abgeleitet werden :

$$\sum_{i,j} \tilde{B}^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{B}^{1/2} \, (B^{-1})_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi = 0 \,. \qquad (2)$$

Dabei ist B^{-1} die zu B inverse Matrix und $\tilde{B}$ ihre Determinante. Die Wellenfunktionen ψ sind mit dem Volumenelement

$$d\tau = |\tilde{B}^{1/2}| \prod_i dx_i \qquad (3)$$

zu normieren. Eine ausführliche Ableitung von Gl. 2 findet man in [83].

Für eine Beschreibung der Kernspaltung wäre Gl. 2 mit der Randbedingung auslaufender Coulombwellen zu lösen. Selbstverständlich ist dieses Problem mit der komplizierten Abhängigkeit aller Massenparameter von allen fünf Koordinaten und der ebenso großen Komplexität der Randbedingungen noch völlig unlösbar in der Praxis. Es ist also unerläßlich, geeignete Vereinfachungen zu finden.

Zunächst sollen die weniger interessanten Variablen ε, β_1, und β_2 eliminiert werden. Dazu wird für feste Werte von λ und ξ die Potentialenergie in den drei genannten Variablen minimiert, so daß sie Funktionen von λ und ξ werden.

Selbstverständlich ist das nur eine grobe Näherung, die allein im statischen Fall exakt ist. In der Dynamik gibt es Abweichungen von den Minimalwerten, die in Kauf genommen werden müssen. Solange es unmöglich ist, alle Koordinaten in die dynamische Behandlung mit einzubeziehen, ist diese Art Näherung auf jeden Fall besser als das völlige Weglassen dieser Koordinaten.

In Fig. 13 ist aufgezeichnet, wie ε, β_1 und β_2 bei festen Werten $\lambda=1.8$ und $\lambda=1.85$ von ξ abhängen. Die Rechnungen sind für ^{236}U. Bemerkenswert ist, daß bei konstanten Werten der drei Koordinaten überhaupt kein asymmetrisches Minimum erzielt werden kann. Die Minimierung in diesen Freiheitsgraden ist also unbedingt erforderlich für eine realistische Beschreibung der Massenasymmetrie.

Führt man ε, β_1,und β_2 als Funktionen von λ und ξ in Gl. 1 ein, dann wird daraus

$$
\begin{aligned}
H(\lambda,\xi) \;=\; & \tfrac{1}{2}\{\, B_{\lambda\lambda} + 2\Sigma_i B_{\lambda x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\lambda} + \Sigma_{i,j} B_{x_i x_j}\frac{\partial x_i}{\partial\lambda}\frac{\partial x_j}{\partial\lambda}\,\}\,\dot\lambda^2 \\
& + \tfrac{1}{2}\{B_{\lambda\xi} + B_{\lambda x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\xi} + B_{\xi x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\lambda} + \Sigma_{i,j} B_{x_i x_j}\frac{\partial x_i}{\partial\lambda}\frac{\partial x_j}{\partial\xi}\}\dot\xi\dot\lambda \\
& + \tfrac{1}{2}\{B_{\xi\xi} + 2\Sigma B_{\xi x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\xi} + \Sigma_{i,j} B_{x_i x_j}\frac{\partial x_i}{\partial\xi}\frac{\partial x_j}{\partial\xi}\}\,\dot\xi^2 \\
& + V(\lambda,\xi)\,. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Dabei sind die Summen nur über die Variablen ε, β_1 und β_2 zu nehmen. Die Ausdrücke in den Klammern können als neue Massen-

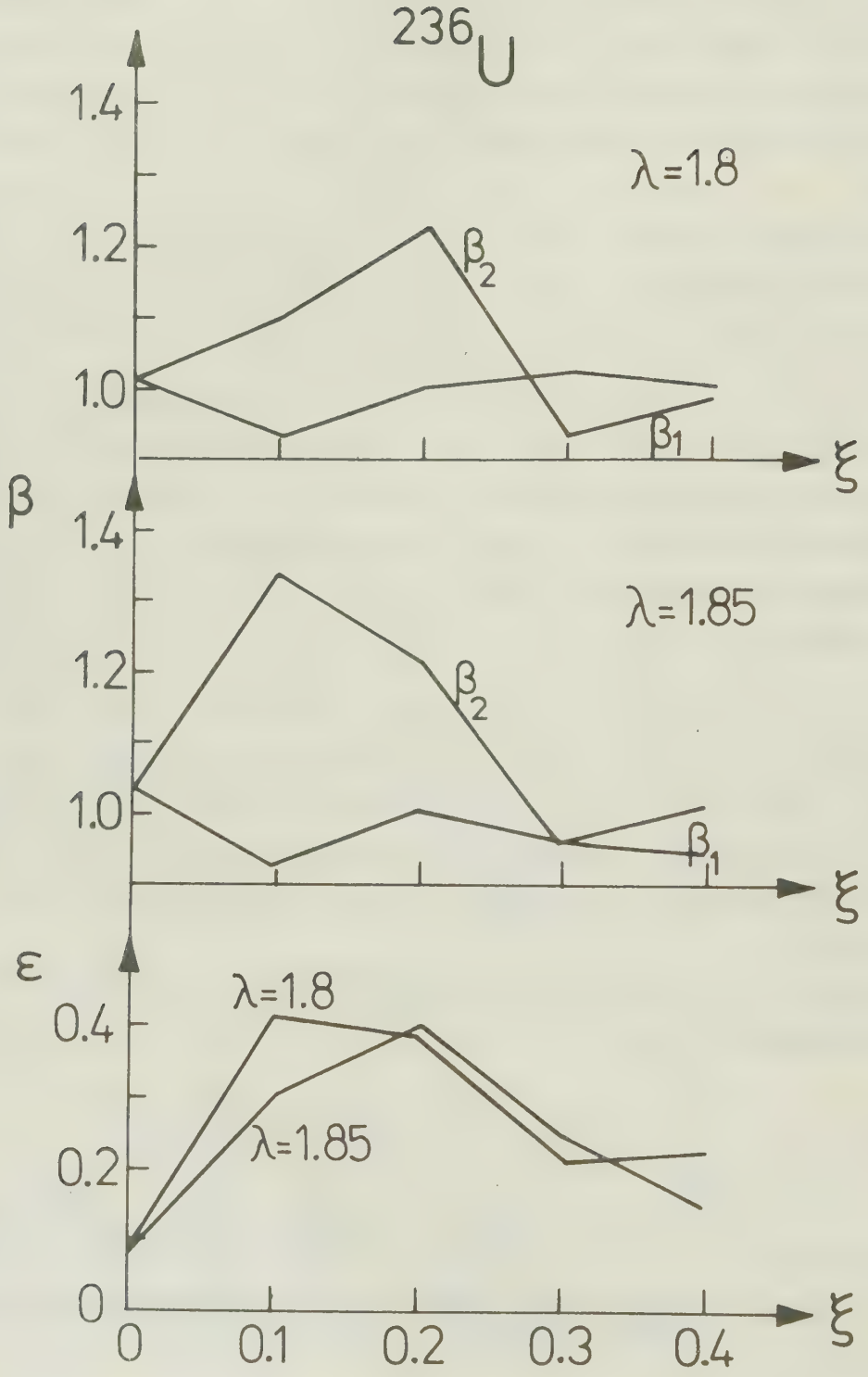

Fig. 13. Abhängigkeit der Werte von ε, β_1 und β_2, die die Potentialenergie minimal machen, von λ und ξ bei ^{236}U.

parameter B' aufgefaßt werden :

$$H(\lambda,\xi) = \frac{1}{2}\left(B'_{\lambda\lambda}\,\dot{\lambda}^2 + 2\,B'_{\lambda\xi}\,\dot{\lambda}\dot{\xi} + B'_{\xi\xi}\,\dot{\xi}^2\right) + V(\lambda,\xi)\ . \tag{5}$$

Praktisch läßt sich das im Cranking-Modell sehr einfach berücksichtigen, indem man die Substitution

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \rightarrow \frac{\partial}{\partial\lambda} + \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial\lambda}\,\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial\xi} + \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial\xi}\,\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{7}$$

durchführt.

Gl. 5 ist schon eine große Vereinfachung gegenüber Gl. 1; dennoch läßt sich auch dieses Problem nicht ohne weitere Annahmen lösen. Eine weitere Vereinfachung erreicht man durch die adiabatische Näherung.

Bei spontaner Spaltung oder allgemein bei Spaltung unter der Schwelle ist die Bewegung in λ während der ersten Phasen des Spaltvorganges sehr langsam. In der Tat tunnelt der Kern ja zunächst durch die Barriere und kann erst danach beschleunigen, indem er den Coulombabfall hinunterläuft (s. Fig. 14).

Es ist also anzunehmen, daß die Vibrationen in ξ bis auf einige Zeit nach Beenden des Tunnelns sehr schnell sind im Vergleich zur Bewegung in λ.

Demnach befindet sich das System zunächst fast ausschließlich im jeweiligen Grundzustand der ξ-Vibration und man kann λ als klassischen Parameter behandeln. Die weitere Rechnung verläuft analog der Ableitung des Cranking-Modells in Kapitel 7.

Quantisiert man die klassische Gesamtenergie

$$H_0(\xi,\lambda) = \frac{1}{2}\,B_{\xi\xi}\cdot\dot{\xi}^2 + V(\xi,\lambda)\ , \tag{8}$$

jedoch nur in ξ, dann erhält man die eindimensionale Schrödinger-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\sqrt{B}}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{1}{\sqrt{B}}\,\frac{\partial}{\partial\xi} + V(\xi,\lambda)\right)\phi(\xi) = E(\lambda)\,\phi(\xi). \tag{9}$$

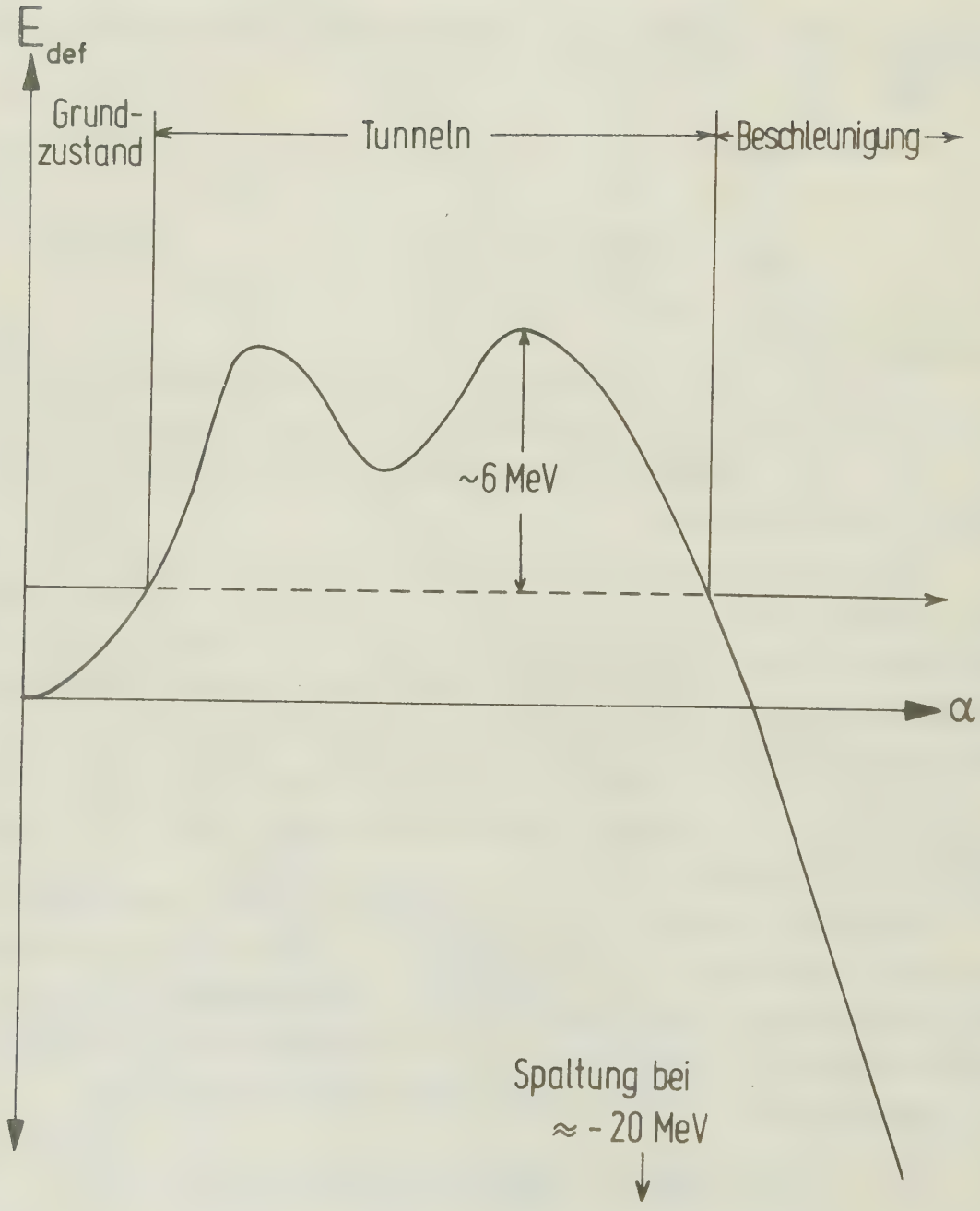

Fig. 14. Schematische Darstellung der Phasen der Spaltung mit Grundzustand, Tunneln und Beschleunigung am Coulombabfall.

Ihre Eigenfunktionen, die von λ abhängen, bilden die adiabatische Basis. Wenn die Kopplung über $B_{\lambda\xi}$ vernachlässigt werden darf, dann kann man die Lösung der zeitabhängigen Gleichung mit λ als Parameter, der klassisch von der Zeit abhängt, in der Form

$$\Psi(\xi,t) = \sum_\nu a_\nu(t)\phi_\nu(\xi,\lambda(t))\cdot\exp(-\frac{i}{\hbar}\int^t E_\nu(\lambda(t'))dt') \qquad (10)$$

ansetzen. Für $B_{\lambda\xi}=0$ werden die Gleichungen etwas komplizierter (s. [84]).

Dabei kann λ klassisch z. B. dadurch gewonnen werden, daß man ξ in Gl. 5 durch eine Funktion $\xi=\xi(\lambda)$ ersetzt, die für festes λ die Potentialenergie minimiert. Das entspricht einem Entlanglaufen im asymmetrischen Minimum.

Diese Methode ist allerdings nur für den Bereich der klassicch erlaubten Bewegung, also nicht für den Tunnelbereich, zulässig. Ihr Ergebnis sollte die Änderung der Massenasymmetrieverteilung $|\Psi(\xi,\lambda)|^2$ mit λ sein. Der Grenzwert dieses Ausdrucks für $\lambda\to\infty$ gäbe dann die Massenausbeute als Funktion der Asymmetrie ξ.

Die adiabatische Näherung gilt zwar nur für den ersten Abschnitt der Bewegung den Coulombabfall hinunter mit Sicherheit, aber an den von Mustafa, Mosel und Schmitt [25] berechneten Potentialenergieflächen sieht man, daß in den letzten Etappen kurz vor dem eigentlichen Spaltpunkt die Struktur der Flächen praktisch unabhängig von λ wird, so daß dann trotz schneller Bewegung in λ keine starken Anregungen in ξ stattfinden sollten.

Geringe Anregungen können mit einem Ansatz nach Gl. 10 in störungstheoretischer Näherung behandelt werden. In dieser Arbeit werden jedoch auch diese Anregungen zunächst noch vernachlässigt und nur die Struktur der adiabatischen Basis $\phi_\nu(\xi,\lambda)$ wird untersucht. Das entspricht der Annahme völliger Adiabasie (oder der nullten Näherung in Störungstheorie [85]), da in diesem Fall nur der Grundzustand in ξ besetzt bleibt. Ein Vergleich dieser Wellenfunktionen mit dem Experiment sollte jedoch schon einen Aufschluß darüber geben, ob die Methode Erfolg verspricht und welche Korrekturen durch nichtadiabatische Effekte zu erwar-

ten sind.

Es gibt aber eine sehr einfache Möglichkeit, ohne eine echte Berücksichtigung der Kopplung von λ und ξ etwa nach Gl. 10 einen Überblick über das Verhalten des Systems bei Anregungen zu erhalten. Dazu sei angenommen, daß die höheren ξ-Wellenfunktionen nach einer Boltzmann-Verteilung besetzt sind:

$$|\Psi_\Theta(\xi)|^2 \simeq \sum_\nu |\phi_\nu(\xi)|^2 \cdot \exp(-E_\nu/\Theta) \; . \qquad (11)$$

Θ ist dabei die Kerntemperatur. Aus semiempirischen statistischen Abschätzungen kann man ungefähr eine Anregungsenergie E^* zuordnen [86] :

$$E^* = a\Theta^2 - \Theta \qquad (12)$$

mit

$$a \simeq A/9\,\mathrm{MeV} \; . \qquad (13)$$

Damit entspricht zum Beispiel in der Uran-Gegend $\Theta = 1$ MeV ungefähr $E^* = 25$ MeV.

10. Ergebnisse und Diskussion

Das im vorhergehenden Abschnitt dargelegte theoretische Programm wurde an drei Kernen, die charakteristisches Spaltverhalten zeigen, praktisch durchgeführt. Um den Vergleich mit dem Experiment zu erleichtern, seien noch einmal die wesentlichen experimentellen Tatsachen vorher zusammengestellt.

Man unterscheidet experimentell drei verschiedene Typen von Massenverteilungen, die in Fig. 15 mit ihrer Abhängigkeit von der Anregungsenergie des spaltenden Kerns aufgezeigt sind. Bei leichten Kernen, etwa für $Z \leq 84$, ist die Verteilung bei symmetrischer Spaltung gepeakt und sehr schmal, wird aber mit wachsender Anregungsenergie rasch breiter. Da die Spaltschwellen größer als 20 MeV sind, ist nur induzierte Spaltung mit relativ hoher Anregung möglich. Der zweite Typ von Spaltung tritt im Bereich $84 < Z < 90$ auf und ist durch etwa gleich häufige symmetrische und asymmetrische Spaltung gekennzeichnet. Man erhält die charakteristischen Massenausbeuten mit drei Maxima. Die Schwellen für symmetrische und asymmetrische Spaltung sind ungefähr gleich hoch. Der dritte Bereich, $90 \leq Z \leq 100$, umfaßt rein asymmetrisch spaltende Kerne mit sehr niedriger Wahrscheinlichkeit für symmetrische Aufspaltung. Dabei ist die häufigste Masse für das schwerere Fragment in ziemlicher Unabhängigkeit von Z immer etwa gleich 140. Das Minimum bei symmetrischer Fragmentation wird bei wachsender Anregung schnell aufgefüllt und es entsteht dann bei sehr hohen Anregungsenergien eine breite symmetrische Verteilung. Diese Art der Spaltung ist bei den Fermium-Isotopen zu Ende; man bekommt etwa ab ^{258}Fm wieder symmetrische Spaltung.

Eng korreliert mit der Massenasymmetrie bei der Spaltung ist die Verteilung der kinetischen Energie und der Anregung in Abhängigkeit von der Fragmentmasse. Fig. 16 zeigt ein typisches Beispiel, nämlich bei der Spaltung von ^{236}U durch thermische Neutronen. Im unteren Teil ist die gesamte kinetische Energie der beiden Fragmente als Funktion der Massenzahl aufgetragen. Ihr Maximum liegt etwa dort, wo auch die Massenausbeute am größten ist, während bei symmetrischer Spaltung die kinetische Energie geringer ausfällt. Etwa umgekehrt verhält sich die

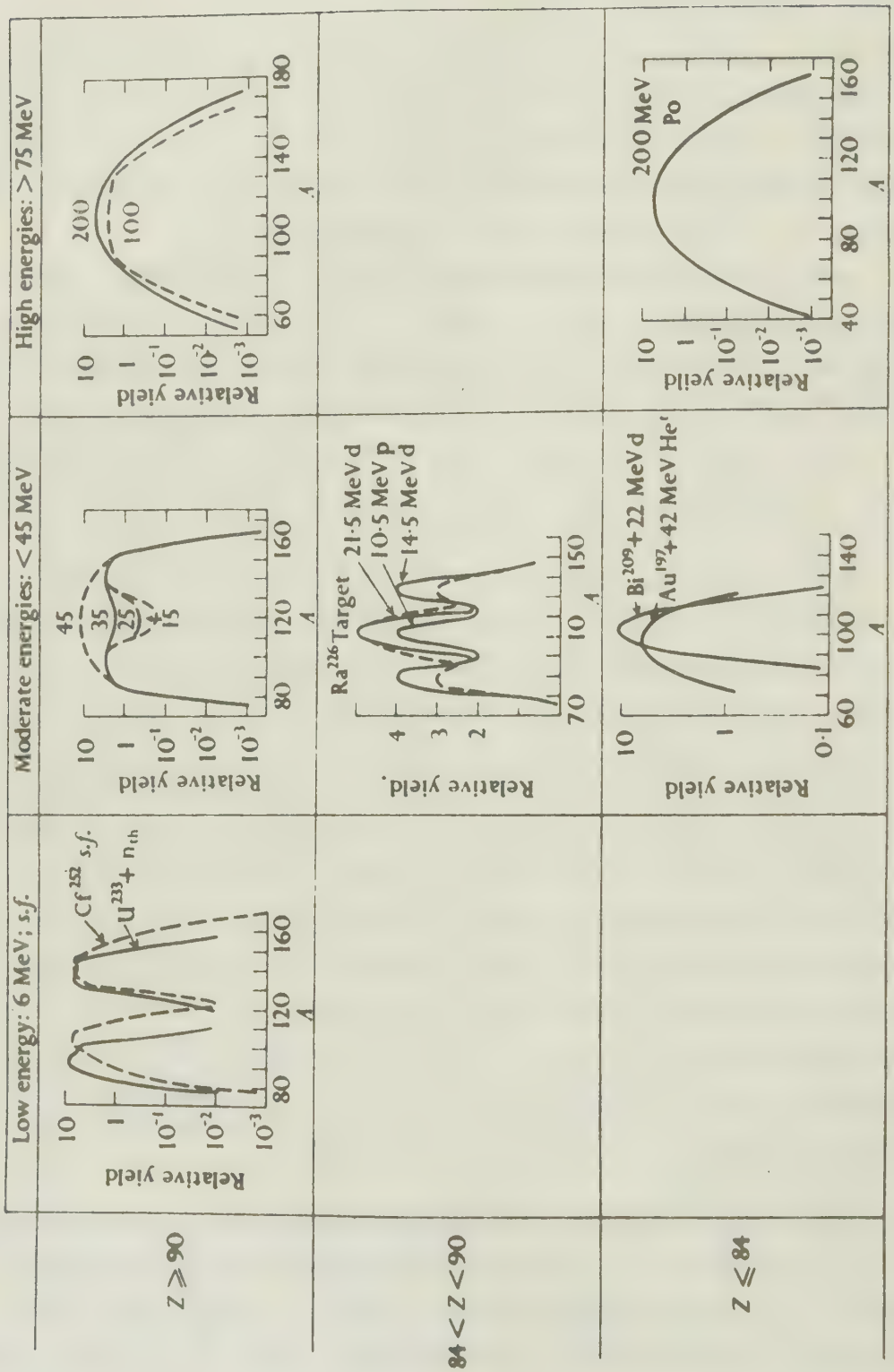

Fig. 15. Überblick über die verschiedenen Typen von Massenausbeuten bei der Spaltung (nach [87]).

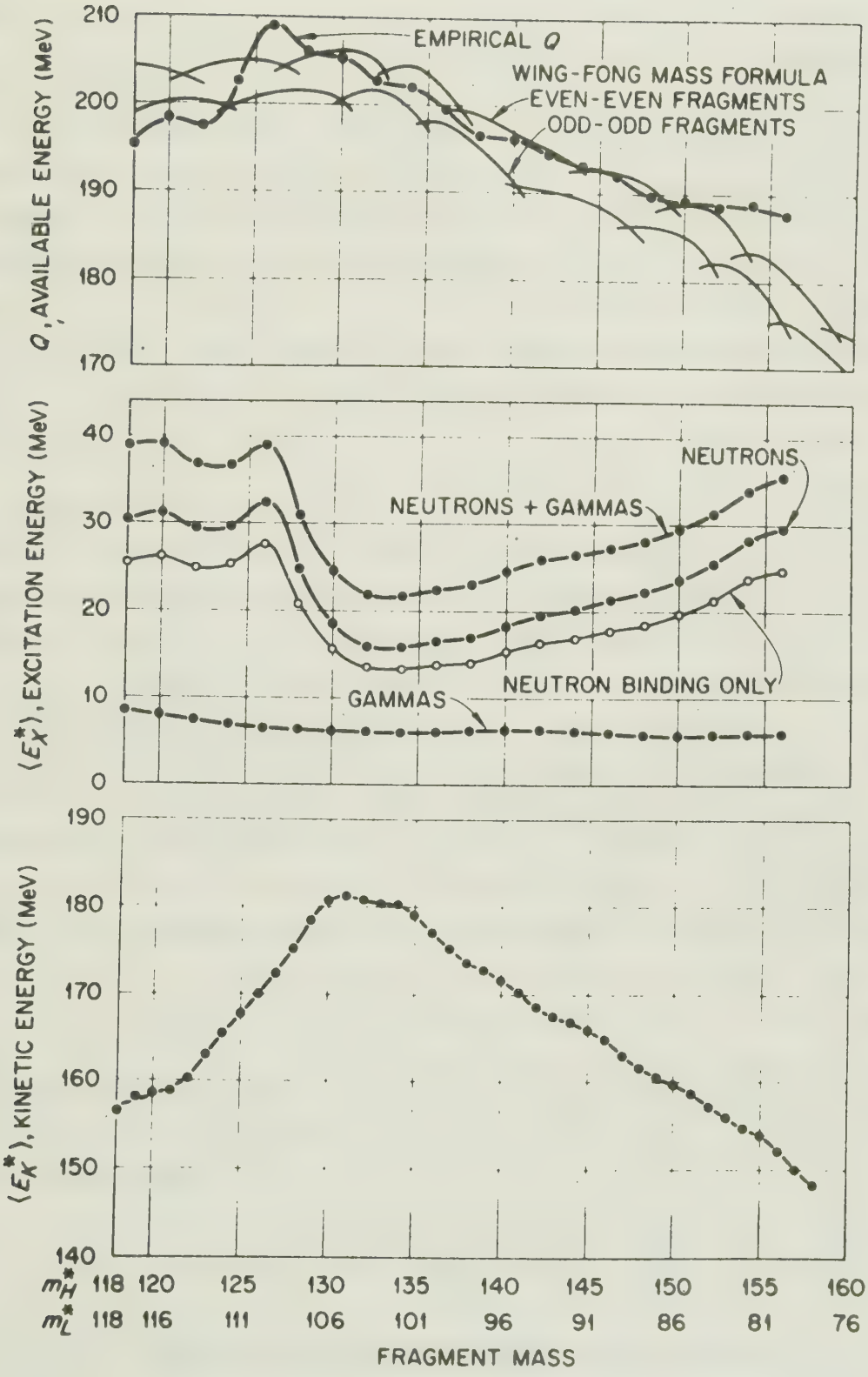

Fig. 16. Kinetische Energie und Anregungsenergie der Fragmente sowie Q-Wert für Spaltung von ^{236}U durch thermische Neutronen in Abhängigkeit von der Massenzahl (nach [88]).

Anregungsenergie der Fragmente, die im mittleren Teil der Figur aufgetragen ist. Sie wird durch Aufsummieren der Energien der Zerfallsprozesse, die sich unmittelbar an die Spaltung anschließen, bestimmt. Ihr Minimum liegt bei der häufigsten asymmetrischen Massenaufspaltung, während sie bei symmetrischer Spaltung wesentlich größer wird. Die Summe von kinetischer und Anregungsenergie ergibt den empirischen Q-Wert, der im oberen Drittel der Figur mit einer hier nicht weiter interessierenden Massenformel verglichen wird.

Die theoretische Deutung dieser Verteilungen stützt sich auf die Annahme, daß am Zerreißpunkt eine Aufteilung der gesamten Energie möglich wird : Die Oberflächenenergie der Fragmente geht über in innere Anregungen (zunächst Oberflächenschwingungen), die sich zu den schon während der Spaltung durch Reibung erzeugten Anregungen addiert, während die Coulomb-Energie am Zerreißpunkt ganz in kinetische Energie der Relativbewegung umgesetzt wird. Dabei wird die schon vor dem Zerreißen vorhandene Energie der Relativbewegung vernachlässigt.

Um Kerne zu behandeln, die alle drei charakteristischen Typen der Massenverteilungen repräsentieren, wurden die folgenden ausgewählt : der asymmetrische Spalter ^{236}U, das symmetrisch spaltende ^{258}Fm und ^{226}Ra aus der Region der Massenverteilungen mit drei Maxima.

Es stellte sich heraus, daß die Minimisierung in den drei Variablen ε, β_1 und β_2 sehr wichtig war. Wie schon erwähnt, erhält man ohne die Berücksichtigung dieser Variablen keine asymmetrischen Minima in der Potentialenergiefläche. Automatische Computer-Verfahren zur Bestimmung des Minimums konnten leider nicht verwendet werden, da dabei die aufwendig zu berechnenden Gradienten der Potentialenergie nötig sind und außerdem oft die Flächen von komplizierterer Struktur, z. B. mit zwei Minima, waren, so daß die Konvergenz der Verfahren nicht gesichert ist.

Deshalb wurde das folgende 'manuelle' Vorgehen benutzt :

a) Das Minimum in ε für feste Werte $\beta_1=1$, $\beta_2=1.2$ (was etwa die Mitte des auftretenden Deformationsbereiches kennzeichnet) wurde gesucht.

b) Für den so erhaltenen Wert von ε wurde die Energie

gleichzeitig in β_1 und β_2 minimiert, wozu etwa zehn Werte dienten.

c) Die Schritte a) und b) wurden so lange wiederholt, bis die Energie mit ca. 0.2 MeV Genauigkeit stationär wurde.

Dieser Prozeß muß für jedes Wertepaar (λ,ξ) wiederholt werden. Da die Minima beim Übergang zu anderen Kernen oder zu anderen λ-Werten in derselben Gegend dieses dreidimensionalen Raumes blieben, wenn nur dasselbe ξ eingesetzt wurde, konnte später mit etwas Erfahrung in dieser Hinsicht Zeit eingespart werden. Dennoch erforderte die Berechnung eines Punktes in (λ,ξ) durchschnittlich 30-40 Energiewerte, was etwa 90-120 min. Computerzeit entspricht.

In Anbetracht dieses großen Rechenaufwandes konnten für jeden Kern nur wenige Werte berechnet werden. So wurden für ein festes λ nur jeweils die fünf festen ξ-Werte 0, 0.1, 0.2, 0.3 und 0.4 benutzt. Dazwischen wurden das Potential und die Massenparameter mit einer Spline-Interpolation [89] interpoliert. Die Zulässigkeit dieser Interpolation wird unten am Beispiel von ^{236}U genauer untersucht.

Um die Wellenfunktionen der adiabatischen Basis nach Gl. 9.9 zu berechnen, wurde ein Differenzenverfahren benutzt, das in Anhang B erläutert ist. Zur Erleichterung des Vergleichs mit den experimentellen Massenausbeuten wird die Wellenfunktion auf eine Massenausbeute in Prozent umgerechnet. Wegen $A=A_1+A_2$ ist

$$\xi = (2A_1 - A)/A \qquad (1)$$

(A_1 und A_2 sind jetzt die physikalischen Fragmentmassen, nicht die nach Gl. 2.2 interpolierten, deren Summe nicht A ist). Für $\Delta A_1=1$ ist dann

$$\Delta\xi = 2/A \ , \qquad (2)$$

so daß die Massenausbeute in Prozent sich zu

$$Y(A_1) = |\psi(\xi)|^2\sqrt{B_{\xi\xi}}\cdot 2/A \qquad (3)$$

ergibt. Der Faktor $\sqrt{B_{\xi\xi}}$ erscheint nach Gl. 9.3. Normiert man

wie üblich auf 200%, dann wird endgültig

$$Y(A_1) = |\psi(\xi)|^2 \sqrt{B_{\xi\xi}} \cdot 400/A \quad [\%] \; . \qquad (4)$$

Bevor auf die Ergebnisse im einzelnen eingegangen wird, sollen einige gemeinsame Eigenschaften der Resultate hervorgehoben werden.

Betrachtet man die Deformationen β_1 und β_2 der Fragmente, in ihrer Abhängigkeit von ξ, so stellt sich immer wieder das gleiche Bild ein : für $\xi=0$ erhält man fast sphärische Fragmente und eine fast ovale Form mit sehr geringer Einschnürung. Am asymmetrischen Minimum des Potentials, das immer in der Gegend $\xi \approx 0.2$ lag, ist das leichte Fragment sehr stark deformiert, während das größere fast sphärisch bleibt. Dieser Effekt läßt sich leicht deuten, wenn man bedenkt, daß bei den asymmetrisch spaltenden Kernen das asymmetrische Maximum der Ausbeute immer einer Massenzahl des schwereren Fragmentes von etwa 140 entspricht, während die des leichteren entsprechend variiert. Das schwerere Fragment besitzt nahezu magische Struktur, so daß es zur Kugelform tendiert und nur durch die Gegenwart des anderen leicht deformiert bleibt.

Zieht man noch einmal Fig. 13 von Seite 50 heran, so lassen sich alle diese Effekte gut verfolgen. Für positives Vorzeichen von ξ entspricht β_2 dem leichteren Fragment. Das qualitative Verhalten der Parameter als Funktionen von ξ bleibt gleich - vielleicht mit Ausnahme des Punktes $\xi=0.1$, der sich stärker ändert - wenn man von $\lambda=1.8$ zu $\lambda=1.85$ übergeht. Am Verhalten von ε ist deutlich zu erkennen, daß der Kern am asymmetrischen Minimum stark eingeschnürte Kernformen bevorzugt.

In Fig. 17 sind die Kernformen für ^{226}Ra bei $\lambda=1.7$ an den beiden Minima - dem symmetrischen und dem asymmetrischen - dargestellt.

Die Massenparameter zeigen das qualitativ zu erwartende Verhalten. Sie oszillieren stark mit etwa gleicher Breite. Die Kopplungsmasse $B_{\lambda\xi}$ ist überall recht klein, so daß die Ungleichung

$$B_{\lambda\xi}^2 \ll B_{\lambda\lambda} \cdot B_{\xi\xi} \qquad (5)$$

sogar an den ungünstigsten Stellen auf etwa einen Faktor 3 erfüllt ist. Damit scheint die Vernachlässigung des Kopplungsterms aus Gl. 9.5 gerechtfertigt.

Für ^{236}U wurde bei zwei λ-Werten gerechnet : $\lambda=1.8$ und $\lambda=1.85$, die im energetischen Abstand von ca. 2 MeV etwa 2 MeV unter dem Grundzustand, also auf dem Spaltweg kurz nach Beendigung des Tunnelns liegen.

Das Potential und die Massenparameter sind in den Fig. 18 und 19 aufgetragen. Man erkennt den zu erwartenden Verlauf des Potentials mit zwei asymmetrischen Minima, die sich beim Übergang von $\lambda=1.8$ zu $\lambda=1.85$ noch geringfügig verschieben. Das Potential wird bei $\lambda=1.85$ noch etwas flacher in der Mitte. Der Massenparameter zeigt in beiden Fällen starke Oszillationen, die ähnlich ausfallen. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, daß die Funktion nur aus 11 Punkten (5 gerechnet und 5 unter $\xi \to -\xi$ reflektiert) konstruiert wurde und deshalb der detaillierte Verlauf der Oszillationen weitgehend ein Produkt der Interpolation ist. Interessant ist, daß bei $\lambda=1.8$ das Maximum im Massenparameter wesentlich höher bei $\xi=0$ ausfällt als für $\lambda=1.85$, wodurch der Effekt des höheren Potentials an dieser Stelle teilweise ausgeglichen wird, da die Wellenfunktion sich an Stellen großen Massenparameters konzentriert[29].

Die mit Hilfe des Differenzenverfahrens erhaltene Grundzustandswellenfunktion ist in den Fig. 20 und 21 als durchgezogene Linie eingezeichnet, und zwar auf eine Massenausbeute nach Gl. 3 umgerechnet. Die Kreise geben experimentelle Daten aus der Spaltung von ^{235}U mit thermischen Neutronen wieder

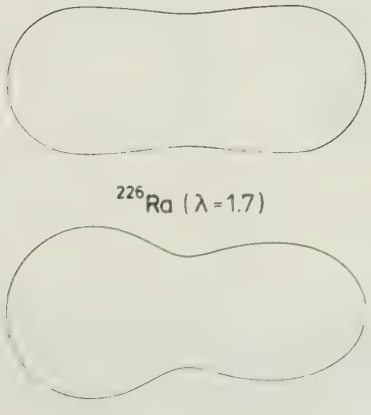

Fig. 17. Kernformen für das asymmetrische und das symmetrische Minimum in der Potentialenergiefläche von ^{226}Ra bei $\lambda=1.7$.

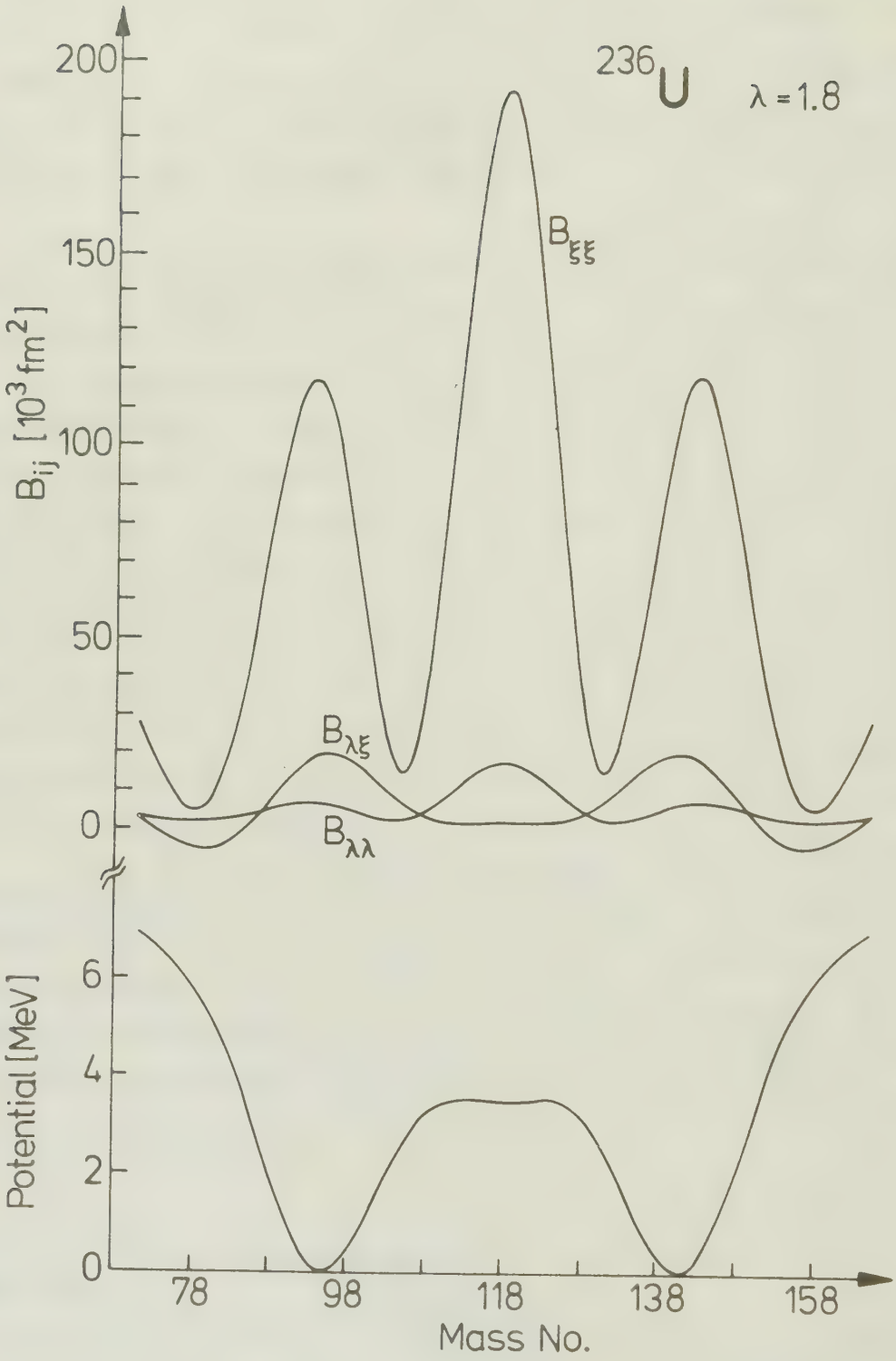

Fig. 18. Massenparameter und Potentialenergie für ^{236}U bei λ=1.8 als Funktion der Asymmetrie ξ.

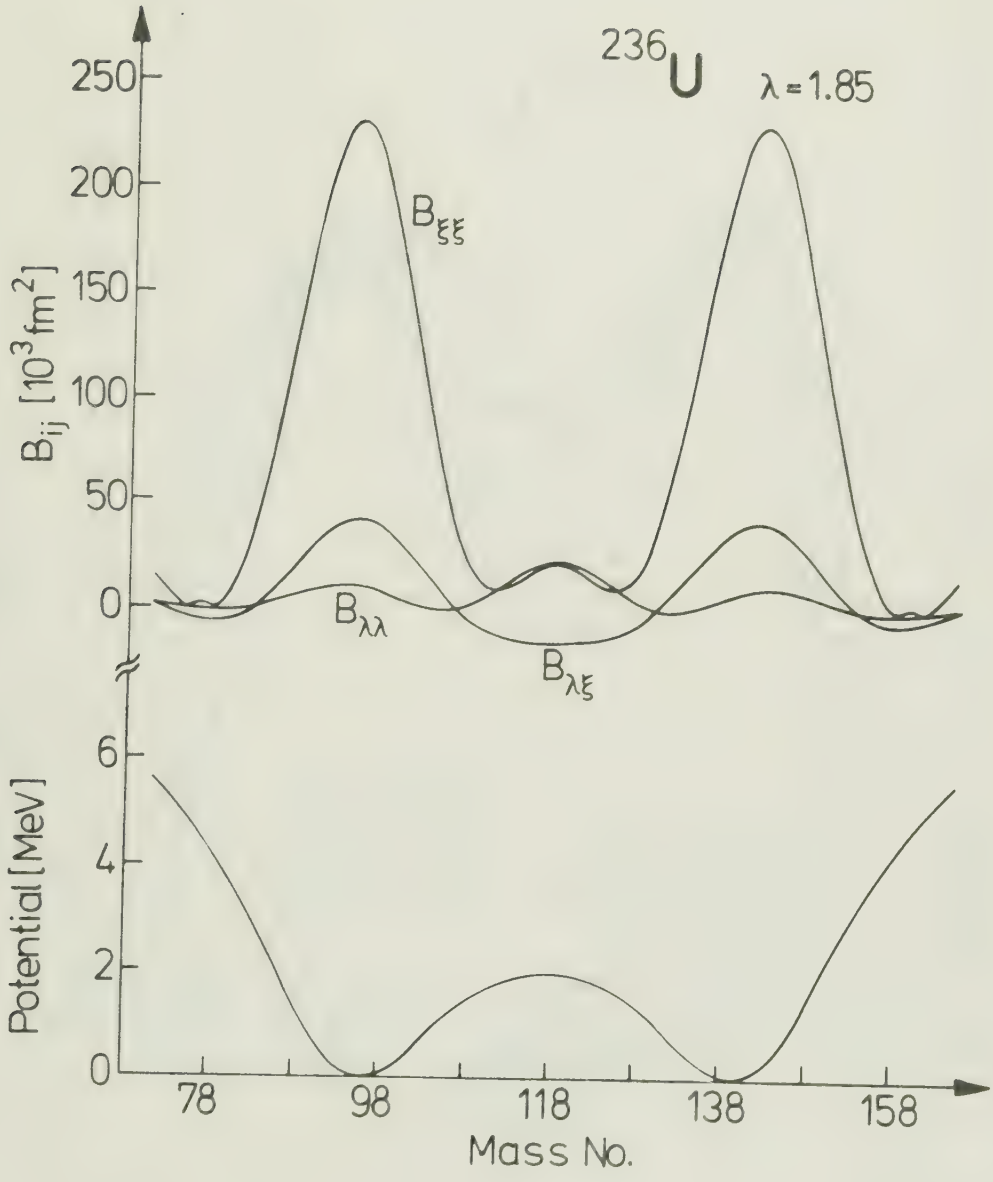

Fig. 19. Massenparameter und Potentialenergie für ^{236}U bei λ=1.85 als Funktionen der Asymmetrie ξ.

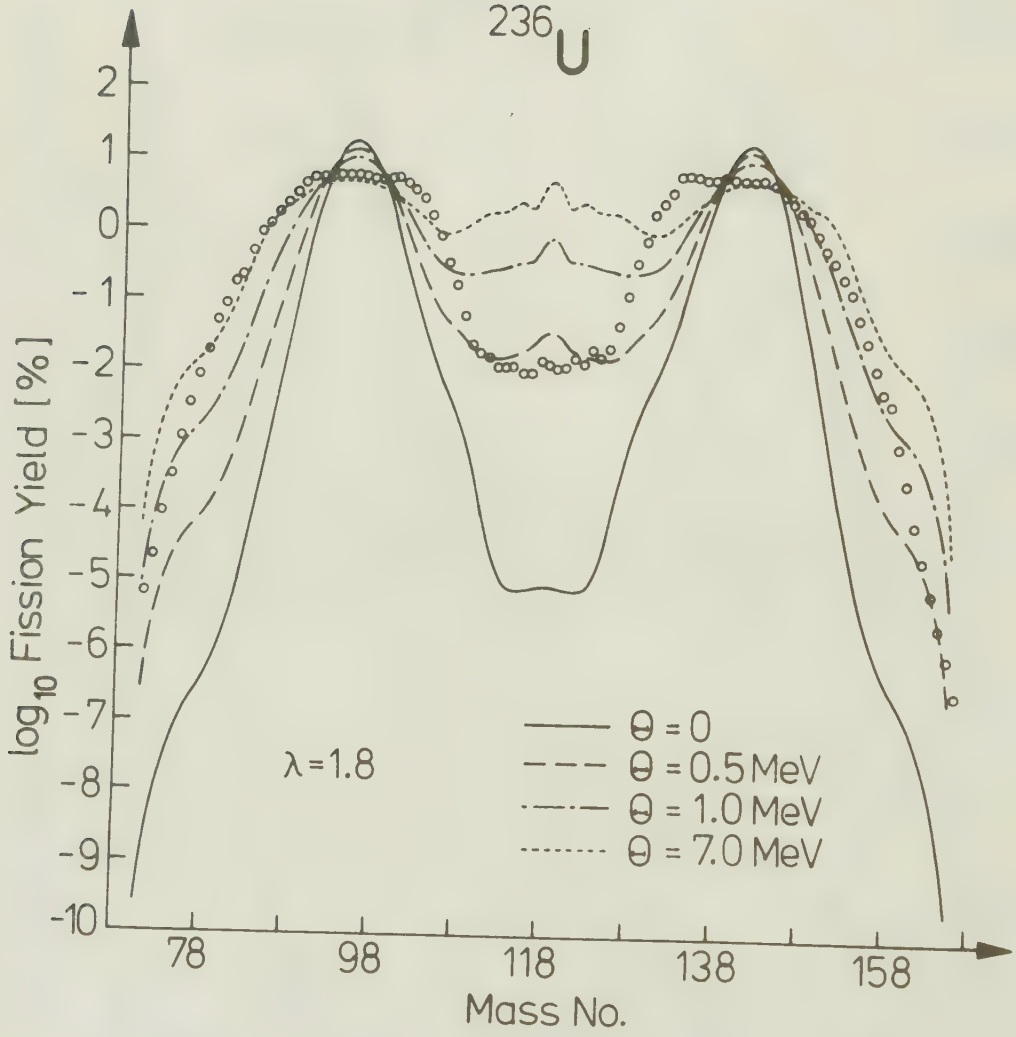

Fig. 20. Theoretische Massenausbeuten für ^{236}U bei $\lambda=1.8$ mit verschiedenen Temperaturen Θ. Die Kreise geben gemessene Werte wieder [90,91].

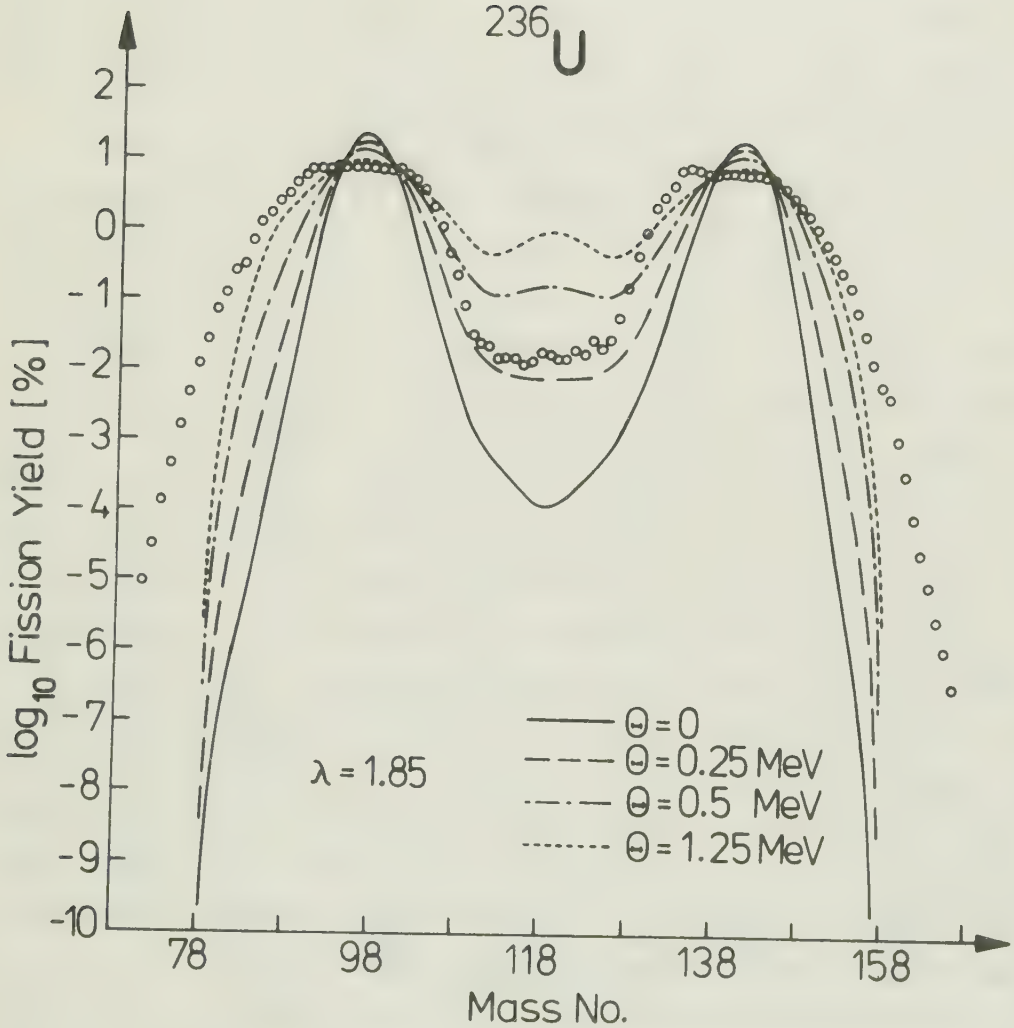

Fig. 21. Theoretische Massenausbeuten für ^{236}U bei $\lambda=1.85$ mit verschiedenen Temperaturen Θ. Die Kreise geben gemessene Werte wieder [90,91].

[90,91], so daß es sich um Spaltung mit etwa 6 MeV Anregungsenergie handelt.

Offenbar stimmen die theoretischen Kurven im groben Verhalten mit den experimentellen Werten überein. Das gilt jedoch noch keineswegs quantitativ; insbesondere wird das Minimum in der Mitte zu tief und die Verteilung außen zu eng. Das könnte daran liegen, daß die Theorie in dieser Form nur für den Grundzustand gilt. Um mit der thermischen Spaltung durch Neutronen zu vergleichen, sollten also Anregungen berücksichtigt werden. Wird das gemäß Gl. 9.11 mit einer Kerntemperatur Θ getan, dann resultieren die anderen in Fig. 20 eingezeichneten Kurven, die zu den dort angegebenen Temperaturen gehören.

Die Einführung angeregter Zustände bringt die Theorie schon wesentlich näher an das Experiment heran. Das Minimum in der Mitte wird sehr schnell aufgefüllt und die Verteilung verbreitert sich an den Seiten. Gleichzeitig erscheinen kleinere Strukturen in der Verteilung, die von den Oszillationen der höheren Wellenfunktionen herrühren. Allerdings ist noch nicht zu sagen, ob solche Feinstrukturen im Experiment reproduziert sein sollten, da das Experiment zwar Strukturen dieser Breite zeigt, diese aber auch durch Prozesse nach der Spaltung hervorgerufen sein können. Andererseits hängt die Feinstruktur in der Theorie natürlich vom genauen Verlauf der Oszillationen in der Masse ab, die noch nicht genügend genau berechnet sind.

Ein weiterer Effekt, der den Vergleich mit dem Experiment erschwert, ist die Neutronenemission bei der Spaltung. Während sich in der Theorie die Massen der Fragmente exakt zu A ergänzen, so daß die Ausbeute symmetrisch um 236/2 = 118 sein muß, fehlen im Experiment noch ca. 3-4 Neutronen an der Summe und die Kurven erscheinen um diesen Betrag verschoben.

Der größte Unsicherheitsfaktor in der Theorie rührt aber von der ungenauen Bestimmung der Massenparameter her. Deshalb wurden einige Rechnungen durchgeführt, die speziell den Einfluß der Massenparameter auf die Ergebnisse untersuchen.

In Fig. 22 ist der Massenparameter $B_{\xi\xi}$ bei der Rechnung durch eine gemittelte Masse $\bar{B}_{\xi\xi}$ ersetzt worden, die noch mit einem Faktor q variiert wird. $\bar{B}_{\xi\xi}$ ist das arithmetische Mittel der berechneten Massenparameter.

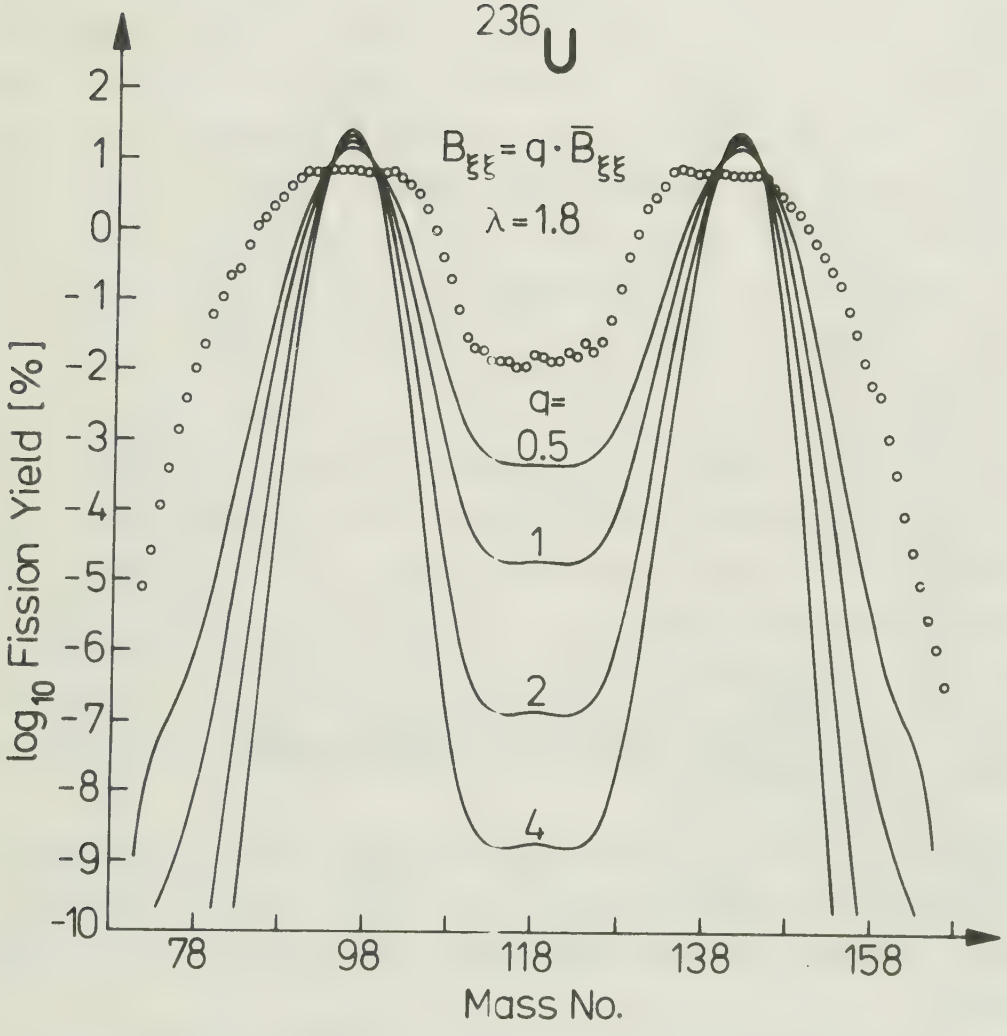

Fig. 22. Massenausbeute im Grundzustand der ξ-Oszillation für ^{236}U bei λ=1.8 unter der Annahme konstanter Masse $B_{\xi\xi}=q\bar{B}_{\xi\xi}$.

Offenbar verändert sich mit sinkendem Massenparameter die Ausbeute etwa in derselben Art wie mit steigender Temperatur; das Minimum wird aufgefüllt und die Flanken verschieben sich etwas. An der qualitativen Übereinstimmung ändert sich nichts, aber der in der Theorie durch die Massen verursachte Unsicherheitsfaktor ist deutlich zu erkennen, da ein Faktor 2 im arithmetischen Mittel durchaus bei einer anderen Interpolation auftreten kann. Bei den thermisch angeregten Zuständen ist die Situation in Fig. 23 veranschaulicht. Hier wurde immer $B_{\xi\xi}=\bar{B}_{\xi\xi}$ angenommen, aber auch für verschiedene Temperaturen gerechnet. Die Übereinstimmung mit der exakten Berechnung in Fig. 20 ist erstaunlich groß. Es gibt nur kleinere Abweichungen unten an den Flanken und in der genauen Höhe des Minimums. Dieses bemerkenswerte Resultat zeigt, daß es bei vielen Rechnungen genügen wird, die Masse durch ihren Mittelwert oder eine glattere Funktion zu ersetzen, wenn man nicht gerade an den kleinen Einzelheiten der Verteilungen interessiert ist.

Von großer Bedeutung scheint auch der Faktor $B_{\xi\xi}^{1/2}$ in Gl. 4 zu sein. Um seinen Effekt abzuschätzen, wurde die Normierung der Wellenfunktion einmal ohne diesen Faktor durchgeführt, so daß die Masse nur in die Berechnung von ψ selbst eingeht, aber nicht noch einmal als Faktor in Y. Das Ergebnis ist in Fig. 24 zu sehen. Es unterscheidet sich nur in der Feinstruktur von der vollständigen Rechnung, da die Oszillationen in der Masse relativ geringe Breite haben. Dennoch ist dieser Faktor sicherlich nicht zu vernachlässigen.

An dieser Stelle sei noch erwähnt, daß ähnliche Tests auch für die anderen Kerne durchgeführt wurden. Da die Ergebnisse in jedem Fall ähnlich ausfielen, wird hier auf ihre Darlegung verzichtet.

Für den zweiten ausgewählten Kern, ^{226}Ra, wurde bei $\lambda=1.7$ und $\lambda=1.8$ gerechnet. Das entspricht Punkten im Abstand von ca. 2 MeV, die aber jetzt etwa 4 MeV über dem Grundzustand liegen. Das ist bei ^{226}Ra sinnvoller, da nur angeregte Spaltung beobachtet wird und das System folglich weit über dem Grundzustand aus der Barriere herauskommt. Deshalb sollte sich die Phase, in der die Massenverteilung adiabatisch bestimmt wird, über dem Energieniveau des Grundzustandes abspielen.

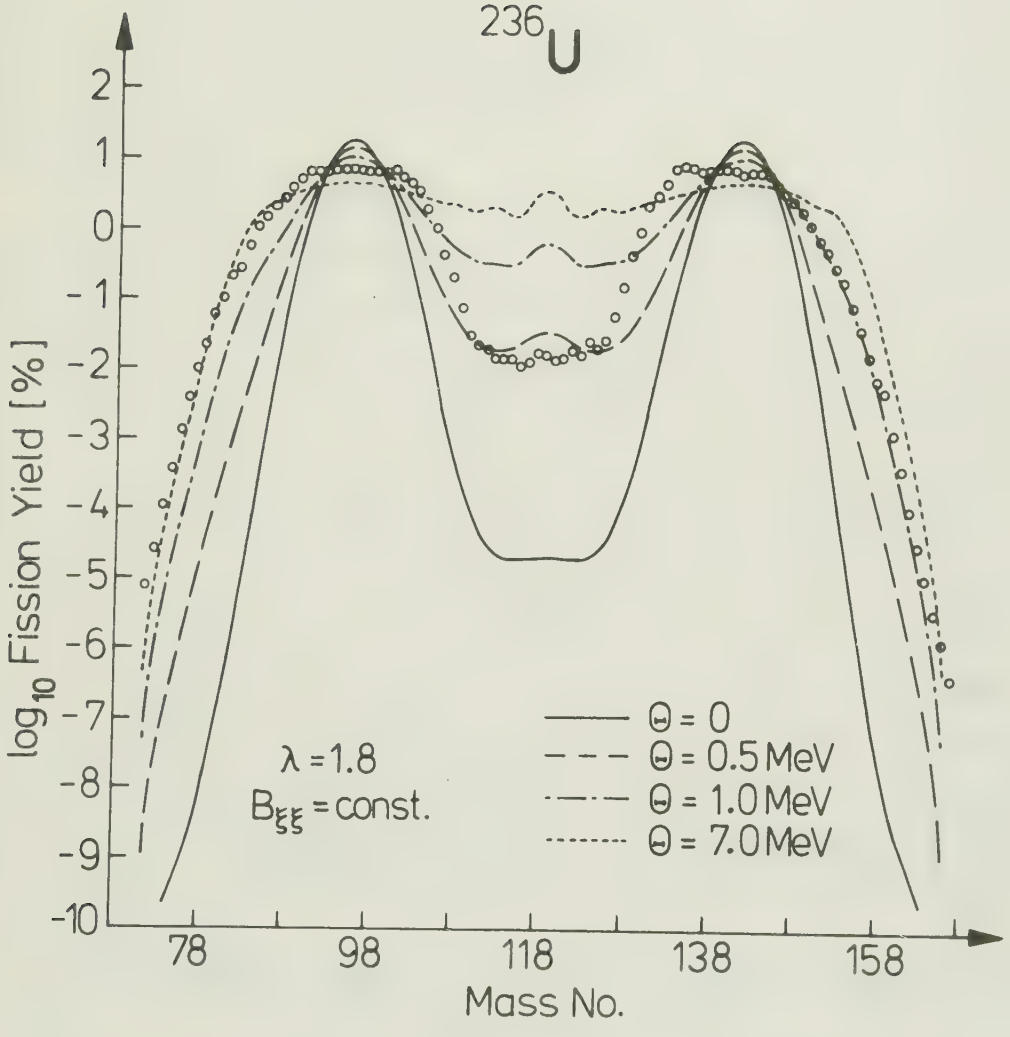

Fig. 23. Massenverteilungen für ^{236}U bei $\lambda=1.8$ in Abhängigkeit von der Temperatur Θ mit konstanter Masse $B_{\xi\xi}=\bar{B}_{\xi\xi}$.

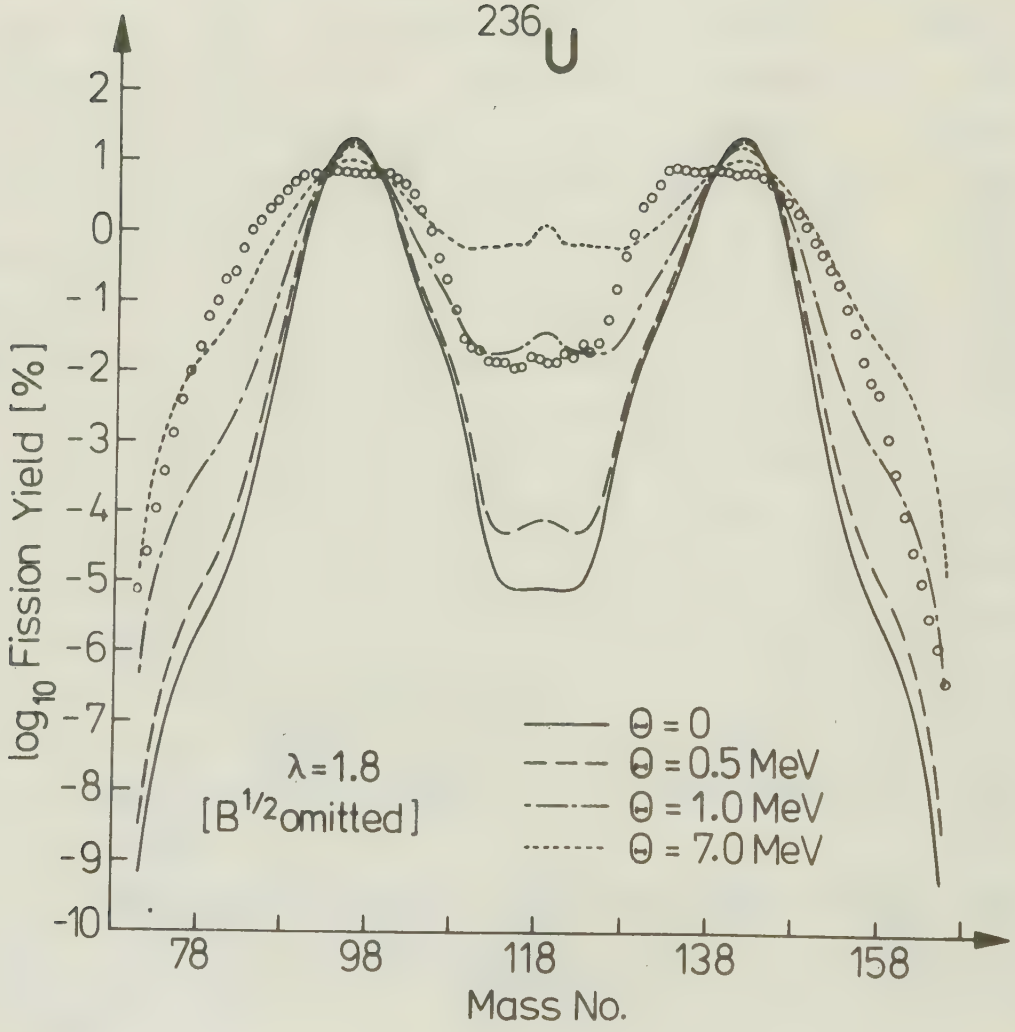

Fig. 24. Massenverteilungen für ^{236}U bei $\lambda=1.8$ in Abhängigkeit von der Temperatur Θ bei Normierung ohne den Faktor $B_{\xi\xi}^{1/2}$.

Die Ergebnisse sind in den Fig. 25-28 aufgetragen. Die experimentellen Vergleichswerte stammen aus der Spaltung von ^{226}Ra durch Protonen von 11 MeV Energie. Da sich das Modell noch nicht auf ug-Kerne anwenden läßt, ist das der nächste Vergleichskern, für den experimentelle Daten vorliegen. Das Potential zeigt drei Minima, die sich bei $\lambda=1.7$ noch um etwa 1.5 MeV in der Höhe unterscheiden, während bei $\lambda=1.8$ beide ungefähr gleich hoch liegen. Ähnlich wie bei Uran oszillieren die Massenparameter sehr stark und ändern sich noch beträchtlich zwischen den beiden λ-Werten. $B_{\lambda\xi}$ ist ebenfalls wieder vernachlässigbar.

Die theoretische Massenverteilung zeigt bei $\Theta=0$ die zu erwartende Struktur mit drei Maxima, zwischen denen bei dieser Temperatur noch tiefe Minima liegen. Im Gegensatz zu Uran ist hier die Feinstruktur sehr stark ausgeprägt, besonders bei $\lambda=1.7$. Sie wird hervorgerufen durch die scharfen Minima in $B_{\xi\xi}$.

Die Breite der Verteilung nimmt stark ab, wenn man von $\lambda=1.7$ zu $\lambda=1.8$ übergeht. Bei den angeregten Zuständen ist dieser Effekt aber bei weitem nicht mehr so stark, da sich bei $\lambda=1.7$ die Verteilung außen mit der Temperatur kaum noch ändert.

Das Experiment zeigt kaum Struktur, da es bei sehr hohen Anregungsenergien gemacht wurde. Bei der logarithmischen Auftragung erkennt man kaum die Minima zwischen den drei Peaks. Obwohl man hier die adiabatische Näherung nur sehr bedingt anwenden darf, scheint die Theorie das Verhalten qualitativ zu reproduzieren.

Interessant ist noch die kleine Vertiefung in der Mitte der Kurve bei $\lambda=1.7$, die durch das Minimum in der Masse bewirkt wird. Dieser Effekt hängt zwar auch sehr kritisch von dem genauen Verlauf des Massenparameters ab, aber das Experiment scheint tatsächlich in der Mitte eine kleine Absenkung zu zeigen.

Der Effekt, den die Massenparameter haben können, zeigt sich an diesen Ergebnissen sehr deutlich daran, daß trotz der höheren Potentialenergie bei $\xi=0$ für $\lambda=1.7$ die Verteilung dort etwa genauso hoch liegt wie für $\lambda=1.8$. Das liegt daran,

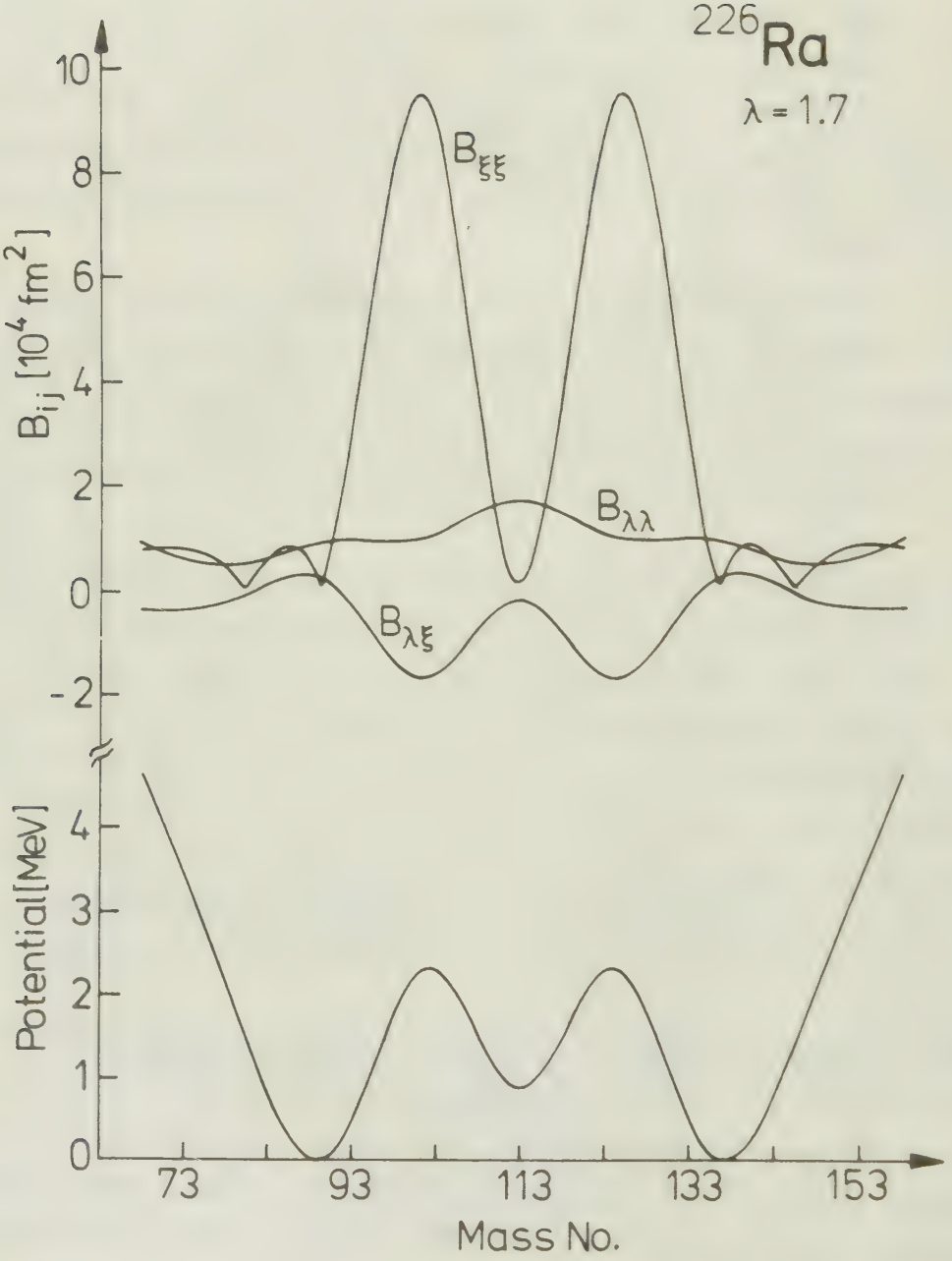

Fig. 25. Massenparameter und Potentialenergie für ^{226}Ra bei $\lambda=1.7$ als Funktion der Asymmetrie ξ.

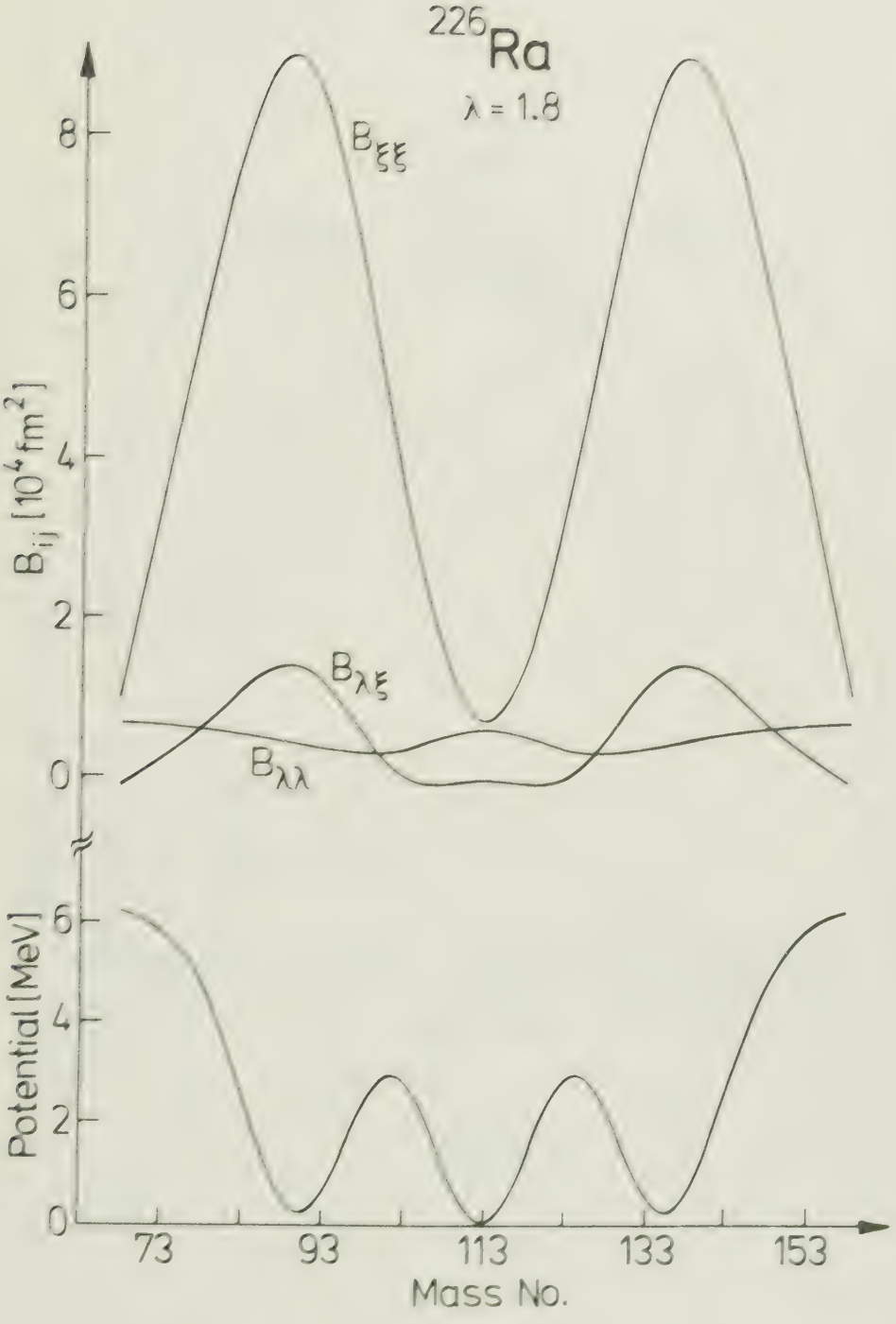

Fig. 26. Massenparameter und Potentialenergie für ^{226}Ra bei λ=1.8 als Funktion der Asymmetrie ξ.

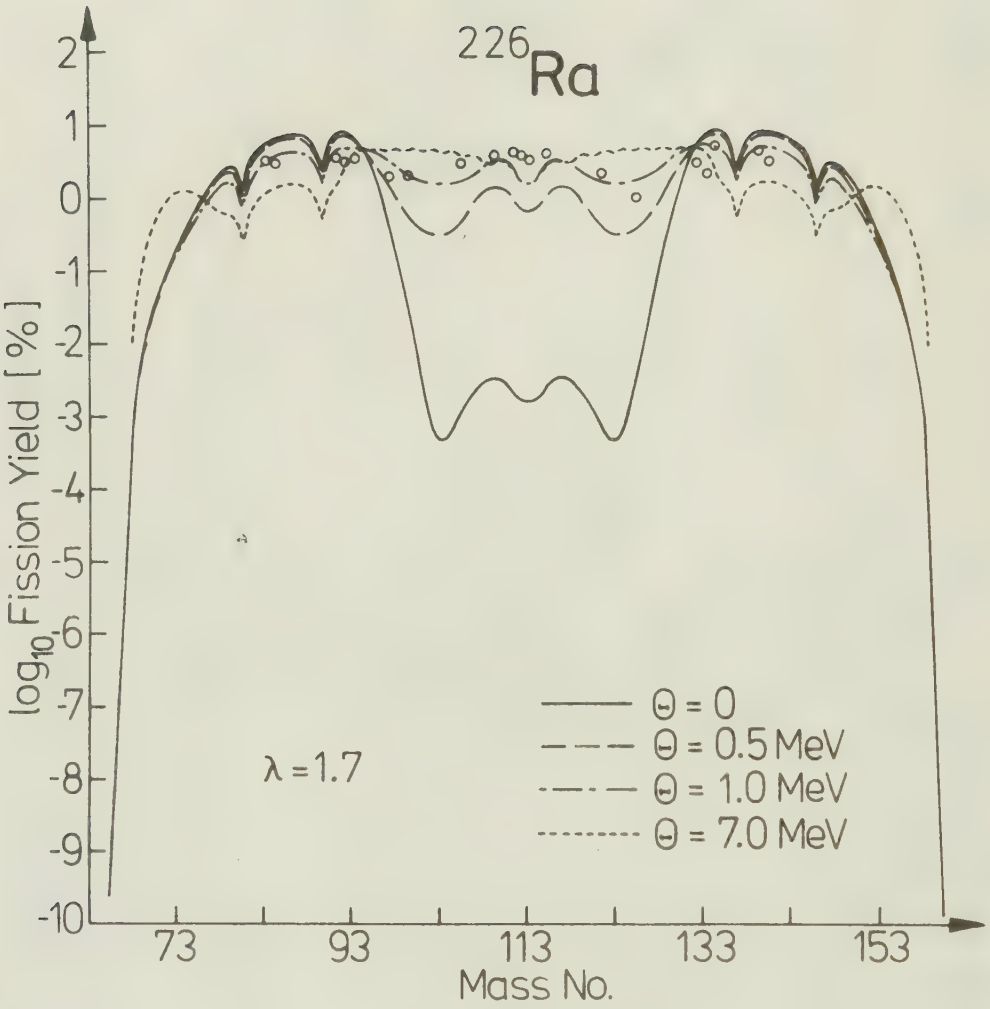

Fig. 27. Theoretische Massenausbeuten für ^{226}Ra bei λ=1.7 mit verschiedenen Temperaturen Θ. Die Kreise geben gemessene Werte wieder [92].

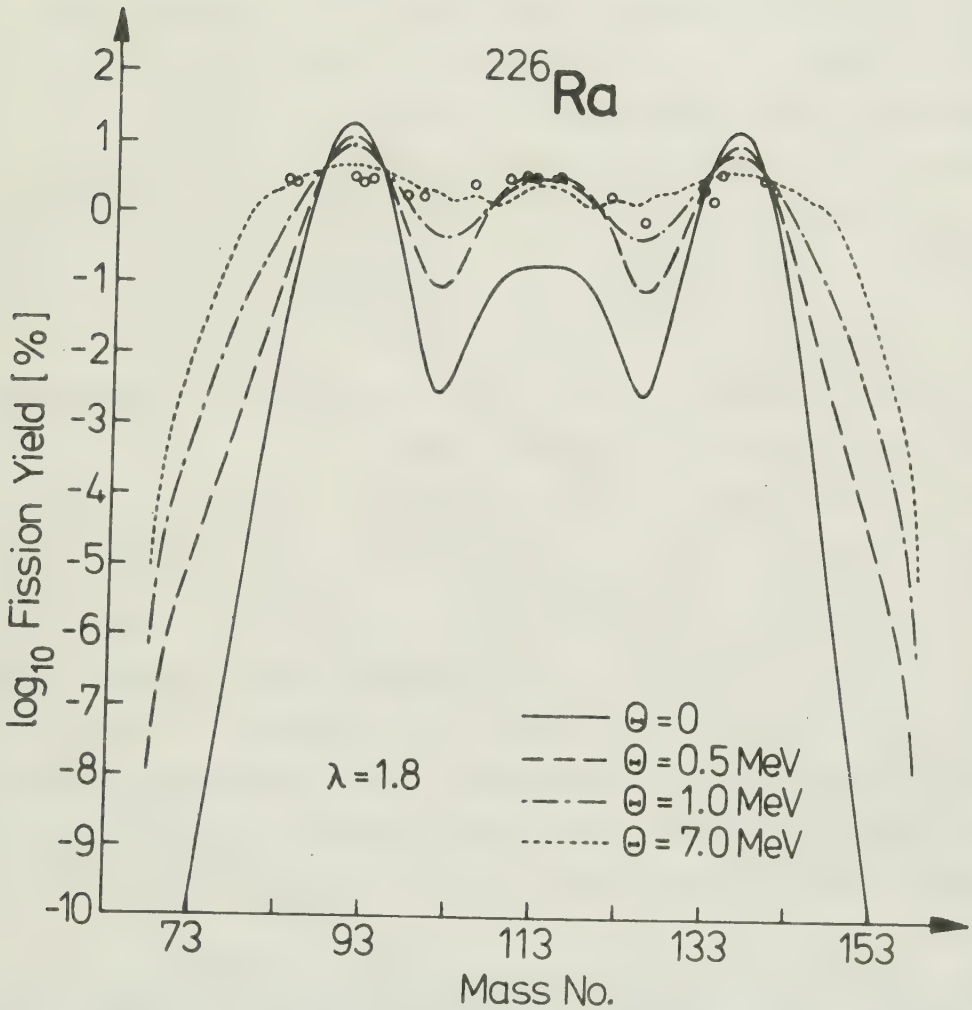

Fig. 28. Theoretische Massenausbeuten für ^{226}Ra bei λ=1.8 mit verschiedenen Temperaturen Θ. Die Kreise geben gemessene Werte wieder [92].

daß bei $\lambda=1.7$ der Massenparameter für $\xi=0$ wesentlich stärker wächst als bei $\lambda=1.8$ und somit den Effekt des höheren Potentials dort ausgleicht.

Für ^{258}Fm wurde nur bei $\lambda=1.8$ gerechnet, da die experimentellen Ergebnisse dort noch keinen detaillierten Vergleich erlauben. Messungen von John u. a. [93] zeigen bei Spaltung von ^{257}Fm durch thermische Neutronen eine Verteilung mit einem Maximum bei symmetrischer Spaltung, das an den Flanken charakteristische Höcker aufweist. Eine ähnliche Struktur ergibt sich auch aus der Theorie. Ihre Ergebnisse sind in den Fig. 29 und 30 aufgetragen. Die symmetrische Verteilung verbreitert sich sehr rasch mit steigender Temperatur, ist allerdings bei den beiden niedrigsten Temperaturen noch zu schmal im Vergleich zum Experiment. Anzeichen für das Auftreten von asymmetrischer Spaltung mit sehr geringem Abstand der Maxima, wie sie bei spontaner Spaltung von ^{257}Fm beobachtet wird, sind in der Theorie nicht zu sehen, dieser Effekt kann bei der Addition eines Neutrons durchaus verloren gehen.

Die Deformationen an den betrachteten Punkten stehen bei keinem der drei Kerne in Widerspruch zu den beobachteten kinetischen Energien der Fragmente. Bei symmetrischem Aufbruch ist der Kern nach dem Gesagten wesentlich weniger eingeschnürt als für asymmetrische Deformationen. Demnach sollte die Spaltung dann auch bei wesentlich größerer Elongation erfolgen, so daß die Coulombenergie am Zerreißpunkt geringer wird und eine niedrigere kinetische Energie erreicht wird. Die größere Deformationsenergie erhöht die Anregung der Fragmente.

Zum Abschluß sei noch einmal darauf hingewiesen, daß in der Theorie kein einziger Parameter an die experimentellen Massenverteilungen angefittet wurde, sondern nur die auch sonst im Schalenmodell üblichen Parameter verwendet wurden.

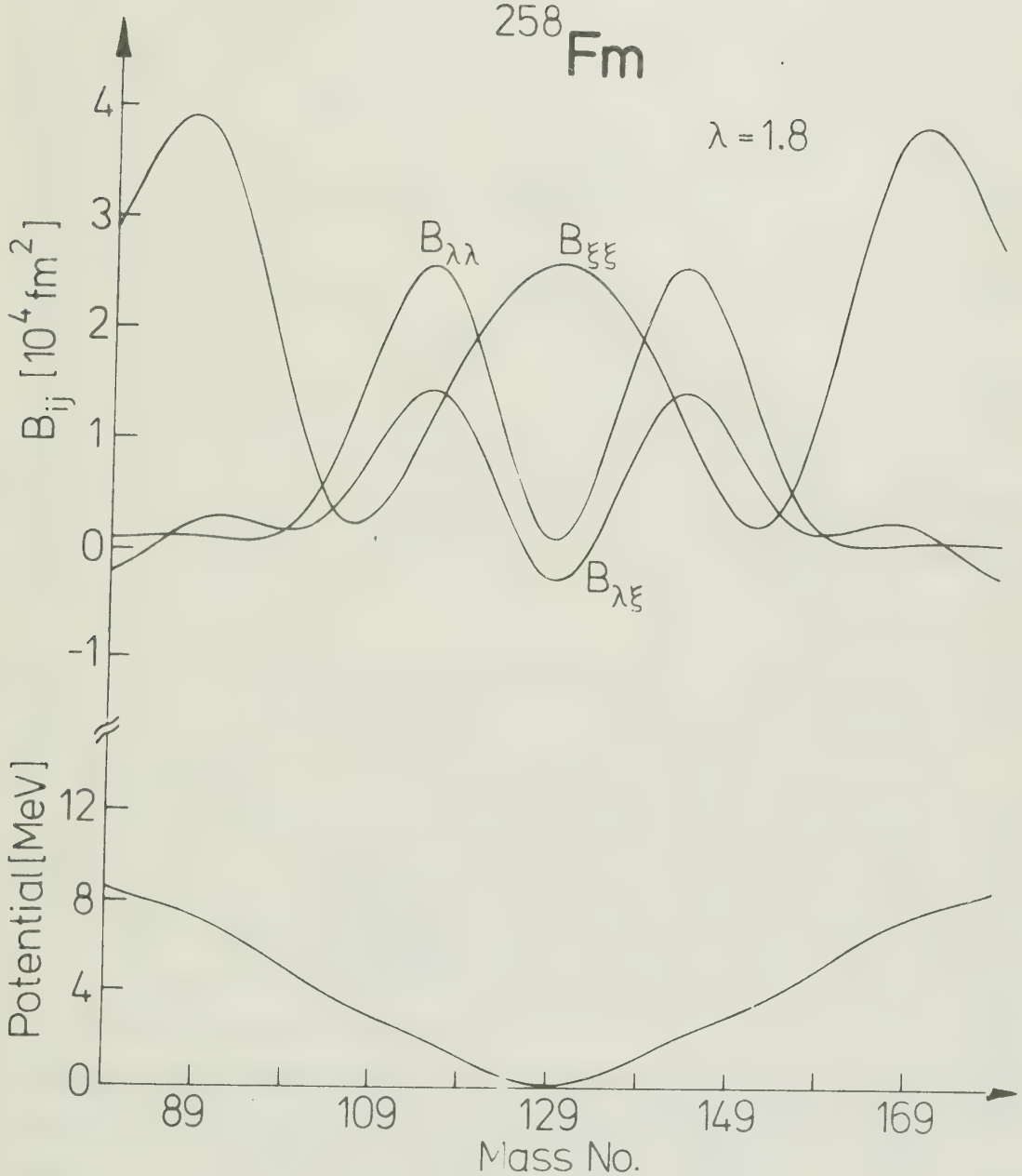

Fig. 29. Massenparameter und Potentialenergie für ^{258}Fm bei $\lambda=1.8$ als Funktion der Asymmetrie ξ.

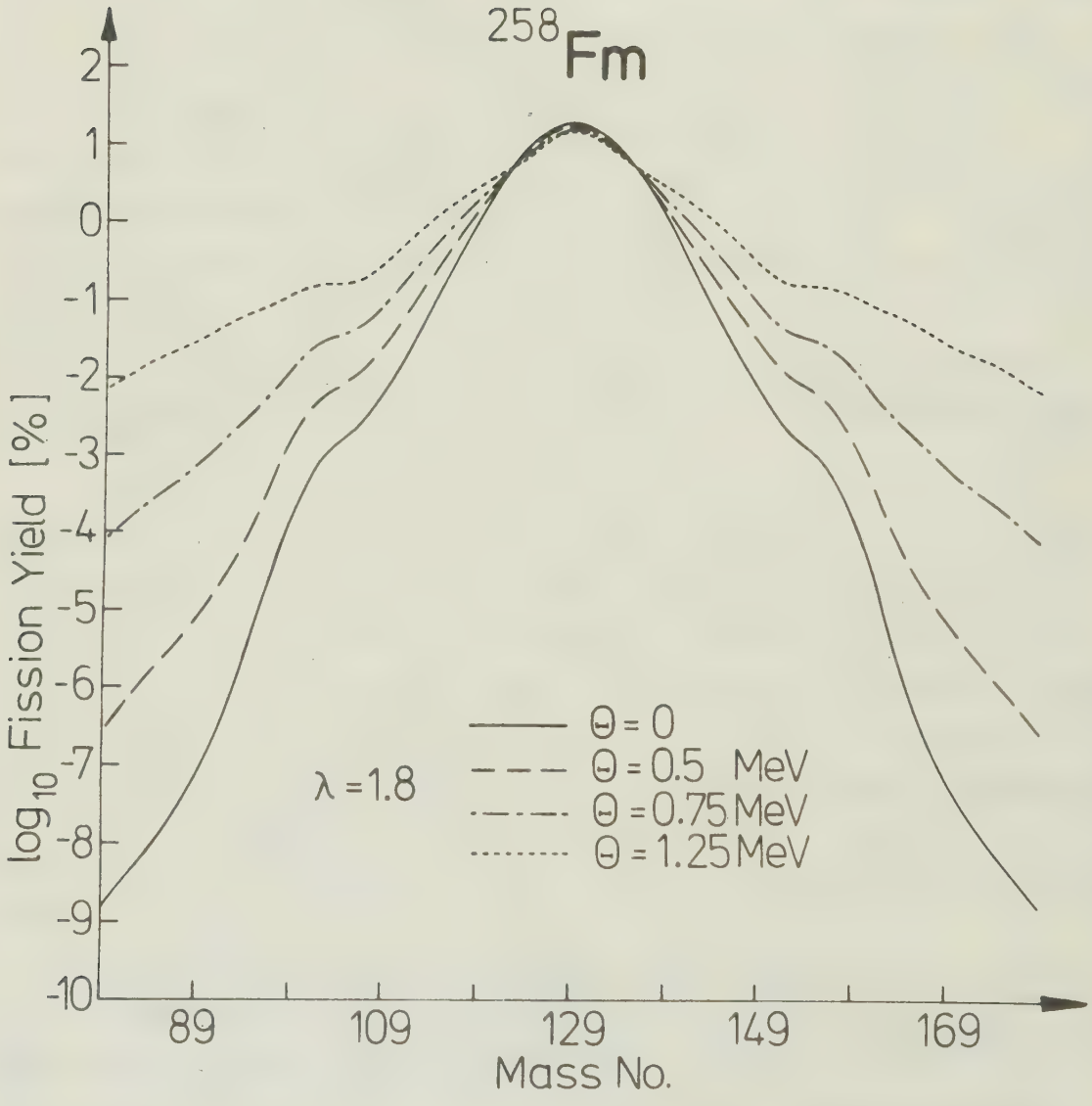

Fig. 30. Theoretische Massenausbeuten für ^{258}Fm bei $\lambda=1.8$ mit verschiedenen Temperaturen Θ.

11. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine Beschreibung der Verteilung der Gesamtmasse eines spaltenden Kerns auf die Fragmente mit Hilfe einer kollektiven Koordinate vorgeschlagen und an verschiedenen Beispielen im Vergleich mit dem Experiment die Anwendbarkeit der Methode untersucht. In Anbetracht der notwendigen Näherungen und der relativ wenig genauen Bestimmung vor allem der Massenparameter ist eine quantitative Übereinstimmung mit dem Experiment nicht zu erwarten. Die Ergebnisse zeigen jedoch gute qualitative und semiquantitative Übereinstimmung mit den experimentellen Massenausbeuten.

Dabei erweist es sich i. allg., daß die theoretische Massenausbeute weitgehend von der Potentialenergie bestimmt wird und somit die in der Vergangenheit nur auf Grund von statischen Potentialenergieflächen gemachten Aussagen über Charakteristika der Massenausbeuten (Anzahl und Lage der Maxima, ungefähre Breite im Vergleich zu anderen Nukliden) bestätigt werden. Das gilt jedoch nur dann, wenn auf dem Wege vom Sattelpunkt zur Spaltung keine wesentlichen Änderungen im Aussehen des Potentials mehr eintreten, so daß es sicherlich gewagt ist, nur aus den Eigenschaften des Sattelpunktes Schlüsse zu ziehen.

Das Verhalten der theoretischen Massenausbeuten bei einer nach Gl. 9.11 in das System gebrachten Anregung zeigt ebenfalls qualitative Übereinstimmung mit dem experimentellen Verhalten der Massenausbeuten bei wachsender Kerntemperatur.

Nachdem nun das Modell offenbar grundsätzlich in der Lage ist, realistische Massenausbeuten zu liefern, gibt es eine Reihe von Möglichkeiten, es zu verbessern oder den Anwendungsbereich zu erweitern, wobei sich einerseits neue Tests für die Methode, andererseits aber auch möglicherweise Aufschlüsse über andere Kerneigenschaften ergeben sollten. Einige Möglichkeiten seien hier tabellarisch zusammengestellt :

a) Eine genauere Berechnung der Massenparameter und Potentiale sollte Aufschluß darüber geben, ob die Feinstruktur in den theoretischen Massenausbeuten mit der Feinstruktur des Experiments zusammenhängen könnte.

b) Die Rechnungen sollten noch für einige andere repräsentative Kerne gemacht werden, um zu testen, ob deren Verhalten ebenfalls reproduziert wird. Mit ^{236}U, ^{226}Ra und ^{258}Fm ist jedoch schon für alle drei wichtigen Typen des Massenasymmetrieverhaltens ein Beispiel berechnet worden und die Erfolge von Mustafa, Mosel und Schmitt [25] bei der statischen Berechnung von Potentialenergieflächen für die Fm-Isotope und für Kerne in der Pb-Gegend lassen das gleiche auch für dieses Modell vermuten, das dem von ihnen benutzten sehr ähnlich ist.

c) Da es sich in den Ergebnissen zeigte, daß die theoretischen Ausbeuten noch ziemlich stark von der Stelle abhängen, an der λ festgehalten wird, ist es unumgänglich, die Entwicklung der Ausbeute mit λ nach dem in Kapitel 9 (Gl. 10) angedeuteten Verfahren zu untersuchen. Die Anregung höherer ξ-Funktionen wird zu einem ähnlichen Effekt wie die Temperaturverteilung führen, es handelt sich aber dann um eine kohärente Summe, so daß man mehr Strukturen erwarten sollte. Man könnte in die klassische Bewegungsgleichung für λ einen Reibungsterm einführen,

$$B_{\lambda\lambda}\,\ddot{\lambda} = -\gamma\cdot\dot{\lambda} - \frac{dV(\lambda,\xi(\lambda))}{d\lambda}\,, \qquad (1)$$

und hätte dann aus Gl. 9.10 Gesamtwellenfunktionen, die parametrisch von γ abhängen. Die Besetzung der höheren Anregungszustände in ξ ist aber damit auch von der Reibungskonstante γ abhängig, so daß man nicht nur etwas über den Einfluß der Reibung auf die Massenverteilung, sondern womöglich auch durch einen Vergleich mit dem Experiment eine Abschätzung für die Reibungskonstante selbst erhalten könnte.

d) In allen bisherigen Rechnungen im Zweizentrenmodell und ihm ähnlichen Modellen wurde stets angenommen, daß die Ladungs- und Massendichte des Kerns homogen sind. Führt man Verschiebungen der Ladung in das System ein, die etwa mit einer kollektiven Koordinate ζ zu beschreiben wären, so bekommt man effektiv eine Berücksichtigung des Riesenresonanzfreiheitsgrades. Genauso, wie ξ die Massenasymmetrie beschreibt, würde dann ζ eine Ladungsasymmetrie beschreiben, die mit den experimentell beobachteten Ladungsverteilungen auf die Frag-

mente zusammenhängt.

e) Die Koordinate ξ kann dazu gebraucht werden, bei der Behandlung von Schwerionenreaktionen Transferprozesse im wesentlichen als elastische Potentialstreuung zu behandeln. Man setzt eine einlaufende Welle an, die durch den Faktor $\delta(\xi-\xi_0)$ auf ein festes Verhältnis der Massen der beiden Ionen festgelegt wird. Diese Welle wird dann am Potential $V(\lambda,\xi)$ gestreut und verbreitert sich in ξ, so daß in der resultierenden auslaufenden Welle eine breitere Verteilung von ξ-Werten vorkommt. Damit ist eine große Zahl von Transferreaktionen in der Streuung mitenthalten, wofür man sonst einen Vielkanalansatz machen müßte. Allerdings sind die Schwierigkeiten, die dabei auftreten, wesentlich größer als in der Spaltung. Es sei nur noch einmal auf das asymptotische Verhalten der Massenparameter in ξ hingewiesen (s. Kapitel 9); außerdem tritt zusätzlich die Schwierigkeit auf, daß man das Tropfenmodell dann über den Zerreißpunkt hinaus ausdehnen muß.

Die Einführung der Koordinate ξ eröffnet also eine große Zahl von interessanten Möglichkeiten in der Spalt- und Schwerionenphysik. Die hier dargelegten Ergebnisse scheinen zu weiteren Rechnungen mit dieser Methode zu ermutigen.

Anhang A. Matrixelemente des Hamiltonoperators

Der Hamiltonoperator nach Gl. 3.1 zerfällt in die vier Bestandteile

$$H = H_0 + V_1 + V_{ls} + V_{l^2}. \tag{1}$$

H_0 ist der Basis-Hamiltonoperator nach Gl. 3.8, V_1 ist das rein ortsabhängige Zusatzpotential

$$\begin{aligned} V_1 = {} & \frac{1}{2} m\omega_i^2 z'^2(\varepsilon-1-2\varepsilon z'/z_i+2\varepsilon z'^2/z_i^2) + \\ & + \frac{1}{2} m \{\alpha_i^2(1+g_i z'^2) - \omega_\rho^2\} \rho^2 \end{aligned} \tag{2}$$

und V_{ls} und V_{l^2} sind in den Gl. 3.2 und 3.3 definiert. Im folgenden werden die Matrixelemente der einzelnen Teile kurz zusammengestellt. Genaueres ist in [46] zu finden.

a) Matrixelemente von V_1

$$\langle n_z' N_\rho' n_\phi' s'| V_1 |n_z N_\rho n_\phi s\rangle = \tag{3}$$

$$\begin{aligned} = \delta_{n_\phi' n_\phi} \delta_{s's} \cdot \{ & \langle n_z'| \tfrac{m}{2}\omega_i^2 z'^2(\varepsilon-1-2\varepsilon z'/z_i+2\varepsilon z'^2/z_i^2) |n_z\rangle \delta_{N_\rho' N_\rho} \\ & + [\, q(N_\rho+1)\cdot\delta_{N_\rho' N_\rho} - \tfrac{q}{2}\sqrt{N_\rho^2-n_\phi^2}\,\delta_{N_\rho', N_\rho-2} \\ & - \tfrac{q}{2}\sqrt{(N_\rho+2)^2-n_\phi^2}\,\delta_{N_\rho', N_\rho+2}\,] \cdot \\ & \cdot \langle n_z'| \tfrac{m}{2}(\alpha^2(1+g_i z'^2)-\omega_\rho^2 |n_z\rangle \,\} \,. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Abkürzung $q = k_\rho^{-1}$ verwendet. Die Integrationen über z wurden in den Ausdrücken stehengelassen, da sie zwar analytisch ausführbar sind, aber ein Einsetzen keine Vereinfachungen und insbesondere keine Auswahlregeln bringt.

b) Matrixelemente von V_{ls}

Um diese in möglichst einfacher Form schreiben zu können, wird für den Operator $\nabla V \times \vec{p}$ die Abkürzung $\vec{\Lambda}$ eingeführt. Schreibt man diesen Operator in sphärischen Komponenten

$$\Lambda^+ = \Lambda_x + i\Lambda_y, \quad \Lambda^- = \Lambda_x - i\Lambda_y, \quad \Lambda^0 = \Lambda_z \qquad (4)$$

und analog auch den Spin, dann wird ihr Produkt zu

$$(\nabla V \times \vec{p}) \cdot s = \frac{1}{2}(\Lambda^+ s^- + \Lambda^- s^+) + \Lambda^0 s^0 \; . \qquad (5)$$

Die Auswahlregeln für n_ϕ und den Spin werden dann einfach

$$\langle n_z' \, N_\rho' \, n_\phi' \, s' | \, \vec{\Lambda} \cdot \vec{s} \, | n_z \, N_\rho \, n_\phi \, s \rangle = \qquad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \langle n_z' \, N_\rho' \, n_\phi' | \, \Lambda^+ \, | n_z \, N_\rho \, n_\phi \rangle \cdot \delta_{s',s-1}$$

$$+ \frac{1}{2} \langle n_z' \, N_\rho' \, n_\phi' | \, \Lambda^- \, | n_z \, N_\rho \, n_\phi \rangle \cdot \delta_{s',s+1}$$

$$+ s \cdot \langle n_z' \, N_\rho' \, n_\phi' | \, \Lambda^0 \, | n_z \, N_\rho \, n_\phi \rangle \cdot \delta_{s',s} \; .$$

Damit ist die Abhängigkeit von den Spinquantenzahlen trivial und es müssen nur noch die Matrixelemente von Λ selbst angegeben werden. Dazu seien noch für einige Matrixelemente in z Abkürzungen eingeführt :

$$F^{\pm} = \langle n_z' | \, \varepsilon \frac{m}{2} \omega^2 z' (1 - 6z'/z_i + 8z'^2/z_i^2) \pm m\alpha^2 (1 + g_i z'^2) \frac{\partial}{\partial z} \, | n_z \rangle \qquad (6)$$

$$F^0 = \langle n_z' | \, m\alpha^2 g_i z' \, | n_z \rangle \; . \qquad (7)$$

Die im ursprünglichen Operator auftretenden Antikommutatoren werden in den Ausdrücken hier weggelassen, da man sie einfach berücksichtigen kann, indem man in den z-Matrixelementen den Antikommutator mit dem entsprechenden z-abhängigen Ausdruck einsetzt. Bei allen anderen Integrationen spielt der Kommutator keine Rolle.

Die nicht verschwindenden Matrixelemente sind :

$$\langle n_z' N_\rho' n_\phi+1| \Lambda^+ |n_z N_\rho n_\phi\rangle = \tag{8}$$

$$\delta_{N_\rho',N_\rho+1} \{F^+ + F^0\cdot(N_\rho+n_\phi+4)/2\} \sqrt{(N_\rho+n_\phi+2)/2k_\rho}$$

$$+ \delta_{N_\rho',N_\rho-1} \{F^- + F^0\cdot(N_\rho-n_\phi-2)/2\} \sqrt{(N_\rho-n_\phi)/2k_\rho}$$

$$- \tfrac{1}{2}\cdot\delta_{N_\rho',N_\rho+3} F^0 \sqrt{((N_\rho+2)^2-n_\phi^2)(N_\rho+n_\phi+4)/2k_\rho}$$

$$- \tfrac{1}{2}\cdot\delta_{N_\rho',N_\rho-3} F^0 \sqrt{(N_\rho^2-n_\phi^2)(N_\rho-n_\phi-2)/2k_\rho}$$

und

$$\langle n_z' N_\rho' n_\phi-1| \Lambda^- |n_z N_\rho n_\phi\rangle = \tag{9}$$

$$\delta_{N_\rho',N_\rho+1} \{F^+ + F^0\cdot(N_\rho-n_\phi+4)/2\} \sqrt{(N_\rho-n_\phi+2)/2k_\rho}$$

$$+ \delta_{N_\rho',N_\rho-1} \{F^- + F^0\cdot(N_\rho+n_\phi-2)/2\} \sqrt{(N_\rho+n_\phi)/2k_\rho}$$

$$-\tfrac{1}{2}\delta_{N_\rho',N_\rho+3}\cdot F^0 \sqrt{((N_\rho+2)^2-n_\phi^2)(N_\rho-n_\phi+4)/2k_\rho}$$

$$-\tfrac{1}{2}\delta_{N_\rho',N_\rho-3}\cdot F^0 \sqrt{(N_\rho^2-n_\phi^2)(N_\rho+n_\phi-2)/2k_\rho}$$

sowie

$$\langle n_z' N_\rho' n_\phi| \Lambda^0 |n_z N_\rho n_\phi\rangle = \tag{10}$$

$$n_\phi\cdot\langle n_z'| m\alpha_i^2(1+g_i z'^2) |n_z\rangle \delta_{N_\rho',N_\rho} .$$

c) Matrixelemente von V_{l^2}

Diese Matrixelemente wurden schon von Scharnweber [11] angegeben. Dabei ist der zweite, per Definitionem diagonale, Teil trivial und es verbleibt ein einzelner Ausdruck. Die Symmetrisierung hat für jedes Matrixelement getrennt zu erfolgen; läßt man sie vorerst in den Formeln weg, dann lautet das Matrixelement (wieder ist nur das nichtverschwindende angegeben) :

$$\langle n_z' N_\rho' n_\phi s | l_t^2 | n_z N_\rho n_\phi s \rangle = \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\delta_{N_\rho', N_\rho}\{N_\rho \langle n_z'| (z'+\partial/\partial z')(z'-\partial/\partial z')|n_z\rangle$$

$$+ (N_\rho+2)\cdot\langle n_z'| (z'-\partial/\partial z')(z'+\partial/\partial z') |n_z\rangle$$

$$+ n_\phi^2 \langle n_z'||n_z\rangle \}$$

$$+ \frac{1}{2}\delta_{N_\rho', N_\rho+2} \langle n_z'| (z'+\partial/\partial z')^2|n_z\rangle \sqrt{(N_\rho+2)^2-n_\phi^2}$$

$$+ \frac{1}{2}\delta_{N_\rho', N_\rho-2} \langle n_z'| (z'-\partial/\partial z')^2|n_z\rangle \sqrt{N_\rho^2-n_\phi^2} \quad .$$

Dabei ist nur noch zu beachten, daß das scheinbar triviale Matrixelement $\langle n_z'||n_z\rangle$ bei Einfügen des Antikommutators wegen der Ortsabhängigkeit von κ und μ keineswegs $\delta_{n_z' n_z}$ gibt.

Anhang B. Ein Differenzenverfahren zur Lösung der Schrödinger-Gleichung

Die Schrödingergleichung 9.9 wird zunächst umgeformt in

$$\{-\frac{\hbar^2}{2B}\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{h^2}{4B^2}\frac{dB}{d\xi}\frac{d}{d\xi} + V(\xi)\}\psi(\xi) = E\,\psi(\xi)\ . \qquad (1)$$

Zur Abkürzung wurde B für $B_{\xi\xi}$ benutzt. Kürzt man auch die Koeffizienten bei den Ableitungen nach ξ ab, um in größerer Allgemeinheit arbeiten zu können, dann wird die Gleichung zu

$$\{\,g(\xi)\frac{d^2}{d\xi^2} + h(\xi)\frac{d}{d\xi} + f(\xi)\}\psi(\xi) = E\,\psi(\xi)\ . \qquad (2)$$

Nun wird ξ diskretisiert, d. h. man betrachtet die Gleichung an N (in der Praxis 200) äquidistanten Punkten ξ_i, i=1,N. Ihr Abstand sei δ. Sei ψ_i als

$$\psi_i = \psi(\xi_i) \qquad (3)$$

und analog h_i, g_i und f_i definiert. Die Ableitungen werden durch Differenzenquotienten gemäß

$$\left.\frac{d\psi}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_i} = (\psi_{i+1} - \psi_{i-1})/\delta \qquad (4)$$

$$\left.\frac{d^2\psi}{d\xi^2}\right|_{\xi=\xi_i} = (\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1})/\delta^2 \qquad (5)$$

ersetzt, so daß man als Differenzenapproximation von Gl. 2 das folgende System von N Gleichungen erhält :

$$(g_i + h_i\cdot\delta)\,\psi_{i+1} + (f_i\cdot\delta^2 - 2g_i)\,\psi_i + (g_i - h_i\cdot\delta)\,\psi_{i-1} = E\cdot\psi_i\cdot\delta^2\ . \qquad (6)$$

Die Randbedingung $\psi\to 0$ wird durch zusätzliche Gleichungen für die noch undefinierten Größen ψ_0 und ψ_{N+1} berücksichtigt. Die einfachste Methode ist, beide selbst gleich Null zu setzen, sofern man nur sicherstellt, daß die Werte ξ_0 und ξ_{N+1} genügend nahe an der Asymptotik liegen.

Die Randbedingung $\psi \to 0$ für große ξ ist nur eine Näherung. Da ξ im Intervall $(-1,+1)$ definiert ist, sollte man richtiger periodische Randbedingungen verwenden. In der Praxis steigt aber das Potential für $\xi > 0.4$ sehr schnell an, so daß die exponentiell abfallenden Lösungen dort rasch gegen Null gehen und die exponentiell wachsenden sehr hohe Gesamtenergien liefern und deshalb nicht von Interesse sind. Die Näherung $\psi = 0$ bei $\xi = 0.45$ sollte also relativ gut sein.

Das Gleichungssystem 6 kann mit den üblichen Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte einer Matrix gelöst werden. Es ist in diesem Falle von Vorteil, die Bandstruktur der Matrix auszunutzen und nur die untersten Eigenwerte nach der Methode der gebrochenen Iteration zu bestimmen.

Literaturverzeichnis

[1] O. Hahn und F. Straßmann, Naturwissenschaften 27(1939)11 u. 89.

[2] N. Bohr and J. A. Wheeler, Phys. Rev. 56(1939)426

[3] S. G. Nilsson, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 29 no. 16 (1955)

[4] P. Möller and S. G. Nilsson, Phys. Lett. 31B(1970)283

[5] C. Gustafsson, P. Möller and S. G. Nilsson, Phys. Lett. 34B(1971)349

[6] P. Möller, Nucl. Phys. A192(1972)529

[7] K. Albrecht, Dissertation, Frankfurt 1972

[8] N. A. Cherdantsev and V. E. Marshalkin, Bull. Acad. Sci. USSR 30(1966), transl. (1967)

[9] P. Holzer, U. Mosel and W. Greiner, Nucl. Phys. A138(1969) 241

[10] D. Scharnweber, U. Mosel and W. Greiner, Phys. Lett. 24 (1970)601

[11] D. Scharnweber, W. Greiner and U. Mosel, Nucl. Phys. A164 (1971)257

[12] K. Prüß and W. Greiner, Phys. Lett. 33B(1970)197

[13] T. Morović, Dissertation, Frankfurt 1973.

[14] V. M. Strutinsky, Nucl. Phys. A95(1967)420

[15] V. M. Strutinsky, Nucl. Phys. A122(1968)1

[16] R. K. Bhaduri and C. K. Ross, Phys. Rev. Lett. 27(1971)606

[17] D. P. Grechukhin and G. A. Pik-Pichak, IAE-Preprint 2114, Moskau 1971

[18] V. S. Ramamurthy and S. S. Kapoor, Phys. Lett. 42B(1972) 399

[19] D. H. E. Gross, Phys. Lett. 42B(1972)41

[20] M. Brack, J. Damgaard, A. S. Jensen, H. C. Pauli, V. M.

Strutinsky, and C. Y. Wong, Rev. Mod. Phys. 44(1972)320

[21] A. S. Tyapin, Yad. Fiz. 11(1970)98, transl. in Sov. J. Nucl. Phys. 11(1970)53

[22] M. Brack and H. C. Pauli, Nucl. Phys. A207(1973)401

[23] T. Ledergerber and H. C. Pauli, Phys. Lett. 39B(1972)307

[24] M. G. Mustafa, U. Mosel and H. W. Schmitt, Phys. Rev. Lett. 28(1972)1536

[25] M. G. Mustafa, U. Mosel and H. W. Schmitt, Phys. Rev. C7 (1973)1519

[26] C. F. Tsang and J. B. Wilhelmy, Nucl. Phys. A184(1972)417

[27] H. W. Schmitt and U. Mosel, Nucl. Phys. A186(1972)1

[28] M. Bolsterli, E. O. Fiset, J. R. Nix and J. L. Norton, Phys. Rev. C5(1972)1050

[29] H. Hofmann and K. Dietrich, Nucl. Phys. A165(1971)1

[30] J. N. P. Lawrence, Los Alamos Report LA-3774 (1967)

[31] J. R. Nix and W. J. Swiatecki, Nucl. Phys. 71(1965)1

[32] R. W. Hasse, Nucl. Phys. A128(1969)609

[33] D. R. Inglis, Phys. Rev. 96(1954)1059

[34] D. R. Inglis, Phys. Rev. 97(1955)701

[35] D. R. Inglis, Phys. Rev. 103(1956)1786

[36] S. T. Belyaev, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 31 no. 11 (1959)

[37] U. Mosel, J. Maruhn and W. Greiner, Phys. Lett. 34B(1971) 587

[38] J. Maruhn and W. Greiner, Z. Physik 251(1972)431

[39] S. Frankel and N. Metropolis, Phys. Rev. 72(1947)914

[40] S. Cohen and W. J. Swiatecki, University of California Preprint UCRL-10450 (1962)

[41] J. R. Nix, Nucl. Phys. A130(1969)241

[42] J. P. Lawrence, Phys. Rev. B139(1965)1227

[43] W. Fabian, G. E. W. Horlacher and K. Albrecht, Nucl. Phys. A190(1972)533

[44] J. R. Nix, Ann. Rev. Nucl. Sci. 22(1972)65

[45] K. Albrecht, Nucl. Phys. A207(1973)225

[46] J. Maruhn, Diplomarbeit, Frankfurt 1971

[47] K. Albrecht, D. Scharnweber and W. Greiner, Phys. Lett. 32B(1970)229

[48] C. Gustafsson, Proc. Int. Conf. on the Properties of Nuclei far from the Region of Beta-Stability, Leysin 1970 (CERN 70-30, Genève 1970) S. 654

[49] H.-J. Lustig, Diplomarbeit, Frankfurt 1973

[50] F. Dickmann, Phys. Lett. 35B(1971)467

[51] W. I. van Rij and C. T. Hess, Nucl. Phys. A142(1970)73

[52] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York 1965

[53] D. E. Maharry and J. P. Davidson, Nucl. Phys. A183(1972) 371

[54] S. Suekane, S. Yamaji, A. Iwamoto, T. Yamamoto and K. Harada, Japan Atomic Energy Research Institute Report 1972, JAERI-1221(1972), S. 77

[55] W. D. Myers and W. J. Swiatecki, Nucl. Phys. 81(1966)1

[56] W. D. Myers and W. J. Swiatecki, Arkiv Fysik 36(1967)343

[57] C. F. Tsang, University of California Report UCRL-18899

[58] W.-F. Lin, Phys. Rev. C2(1970)871

[59] S. G. Nilsson, C. F. Tsang, A. Sobiczewski, Z. Szymanski, S. Wycech, C. Gustafsson, I. L. Lamm, P. Möller and B. Nilsson, Nucl. Phys. A131(1969)1

[60] S. M. Polikanov et al., Zhur. Eksp. i Teoret. Fiz. 42 (1962)1464, transl. in Soviet Physics JETP 15(1962)1016

[61] C. F. Tsang and S. G. Nilsson, Nucl. Phys. A140(1970)275

[62] U. Mosel and H. W. Schmitt, Phys. Lett. 37B(1971)335

[63] D. R. Bès and Z. Szymarski, Nucl. Phys. 28(1961)42

[64] A. Faessler, U. Götz, B. Slavov and T. Ledergerber, Phys. Lett. 39B(1972)579

[65] V. S. Ramamurthy, S. K. Kataria and S. S. Kapoor, Proc. Nucl. Phys. and Solid State Symposium BARC, Bombay 1972, Vol. 14B, 189

[66] V. S. Ramamurthy, S. K. Kataria and S. S. Kapoor, Phys. Rev. C5(1972)1124

[67] R. Bengtsson, Nucl. Phys. A198(1972)591

[68] S. J. Krieger and C. Y. Wong, Phys. Rev. Lett. 28(1972) 690

[69] W. H. Bassichis, D. R. Tuerpe, C. F. Tsang and L. Wilets, Phys. Rev. Lett. 30(1973)294

[70] K. H. Passler, P. G. Zint and U. Mosel, Preprint, Gießen 1973

[71] H. Galbraith, L. Lin and R. Dreizler, to be published

[72] G. Baumgärtner und P. Schuck, "Kernmodelle", Bibliogr. Institut, Mannheim 1968, Kap. VII

[73] C. F. v. Weizsäcker, Z. Physik 96(1935)431

[74] T. Johansson, S. G. Nilsson and Z. Szymanski, Ann. Phys. (France) 5(1970)377

[75] H. Holm and W. Greiner, Phys. Rev. Lett. 24(1970)404

[76] J. M. Eisenberg and W. Greiner, "Microscopic Theory of the Nucleus", North Holland Publ. Co., Amsterdam 1972, App. 2 und Zitate darin.

[77] B. Fink, D. Kolb, W. Scheid and W. Greiner, Ann. Phys. 69(1972)375

[78] L. Wilets, "Theories of Nuclear Fission", Clarendon Press, Oxford 1964, Abschnitt 4.5

[79] P. Lichtner, D. Drechsel, J. Maruhn and W. Greiner, Phys. Lett. 45B(1973)175

[80] H.-J. Fink, J. Maruhn, W. Scheid and W. Greiner, to be

published

[81] W. Pauli, in : "Handbuch der Physik", Springer-Verlag, Berlin 1933, Band 24 Teil 1, S. 120

[82] B. Podolsky, Phys. Rev. 32(1928)812

[83] J. M. Eisenberg and W. Greiner, "Nuclear Models", North Holland Publ. Co., Amsterdam 1970, Kap. 6.2

[84] P. Lichtner, Dissertation, Mainz

[85] A. B. Migdal and V. P. Krainov, "Approximation Methods in Quantum Mechanics", W. A. Benjamin Inc., New York 1969, S. 81 ff.

[86] K. J. LeCouteur and D. W. Lang, Nucl. Phys. 13(1959)32

[87] L. Wilets, "Theories of Nuclear Fission", Clarendon Press, Oxford 1964, S. 8

[88] H. W. Schmitt, J. H. Neiler and F. J. Walter, Phys. Rev. 141(1966)1146

[89] T. N. E. Grenville, J. SIAM Numer. Analysis B1(1964)53

[90] H. Farrar, H. R. Fickel and R. H. Tomlinson, Can. J. Phys., 40(1962)1017

[91] H. Farrar and R. H. Tomlinson, Nucl. Phys. 34(1962)367

[92] R. C. Jensen and A. W. Fairhall, Phys. Rev. 109(1958)942

[93] W. John, E. K. Hulet, R. W. Lougheed and J. J. Wesolowski, Phys. Rev. Lett. 27(1971)45

Meinem Lehrer, Herrn Professor Dr. Walter Greiner, möchte ich an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit und sein stetes Interesse an ihr danken.

Mein Dank gilt weiterhin den Kolleginnen und Kollegen des Instituts, insbesondere V. Rezwani, H.-J. Fink, T. Morović und P. Lichtner, die in vielen Diskussionen zu dieser Arbeit beigetragen haben. Aus demselben Grunde bin ich den Herren Professoren W. Scheid, D. Drechsel und U. Mosel sowie Dr. M. G. Mustafa und Dr. H. W. Schmitt zu Dank verpflichtet.

Nicht zuletzt danke ich Frau Utschig für das Zeichnen der Figuren und die photographischen Arbeiten und Herrn Brose für den Druck.

Die notwendigen numerischen Rechnungen wurden an der UNIVAC 1108 des Hochschulrechenzentrums Frankfurt durchgeführt, dessen Angestellten ich für mancherlei Hilfe bei ihnen danke.

Lebenslauf

Am 15. Mai 1949 wurde ich, Joachim Alexander Maruhn, als Sohn des Redakteurs Siegfried Maruhn und dessen Ehefrau Irmgard in Frankfurt am Main geboren.

Von 1955 bis 1959 besuchte ich die Riefhofschule zu Frankfurt und wechselte anschließend auf das Gymnasium, die Carl-Schurz-Schule in Frankfurt, über. Dort legte ich im Sommer 1967 die Reifeprüfung ab.

Im Wintersemester 1967/68 begann ich das Physikstudium an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt. Ich wurde ab dem dritten Semester von der Studienstiftung des Deutschen Volkes unterstützt. Nach Beendigung einer Diplomarbeit im Institut für Theoretische Physik bestand ich im Juli 1971 die Diplomprüfung in Physik mit Auszeichnung.

Seit August 1971 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik tätig.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren W. Greiner, M. Huber, H. Arenhövel, D. Drechsel, W. Franz, G. Köthe, F. W. Bauer, W. Martienssen, H. J. Queisser und F. Stummel.